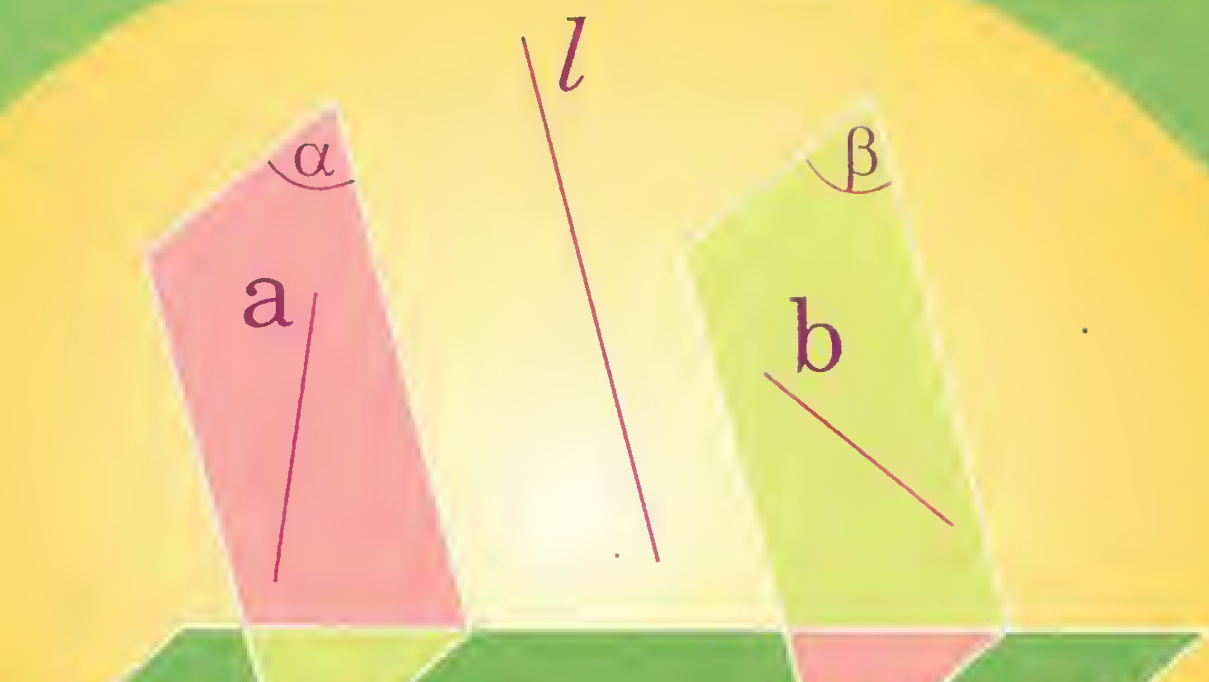
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN

Hình học 11

(Biên soạn theo SGK mới của Bộ GD & ĐT dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học)



ĐH QG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ BÍCH NGỌC (Chủ biên)
LÊ HỒNG ĐỨC

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC
11

Biên soạn theo SGK mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo
Dùng cho học sinh ban A và luyện thi đại học

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ tài liệu:

HỌC VÀ ÔN TẬP

TOÁN

do Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Thạc sĩ Toán học – Kĩ sư Tin học Lê Hồng Đức biên soạn.

Bộ tài liệu gồm 8 cuốn:

Cuốn 1 : Học và ôn tập Toán - Hình học 10
Cuốn 2 : Học và ôn tập Toán - Đại số 10
Cuốn 3 : Học và ôn tập Toán - Lượng giác 11
Cuốn 4 : Học và ôn tập Toán - Hình học 11
Cuốn 5 : Học và ôn tập Toán - Đại số và Giải tích 11
Cuốn 6 : Học và ôn tập Toán - Hình học 12
Cuốn 7 : Học và ôn tập Toán - Giải tích 12
Cuốn 8 : Học và ôn tập Toán - Đại số tổ hợp 12

Mục tiêu của bộ tài liệu này là cung cấp cho các Thầy, Cô giáo một bộ bài giảng chuyên sâu có chất lượng và cho các em học sinh Trung học phổ thông yêu thích môn Toán một bộ tài liệu học tập bổ ích.

Bộ tài liệu được viết trên một tư tưởng hoàn toàn mới mẻ, có tính sư phạm, có tính tổng hợp cao, tận dụng được đầy đủ thế mạnh của các phương pháp đặc biệt để giải Toán.

Bộ tài liệu này chắc chắn phù hợp với nhiều đối tượng bạn đọc từ các Thầy, Cô giáo đến các em Học sinh lớp 10, 11, 12 và các em chuẩn bị dự thi môn Toán Tốt nghiệp PTTH hoặc vào các Trường Đại học.

Cuốn

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN
HÌNH HỌC 11

do Lê Bích Ngọc chủ biên được chia thành 5 chương:

Chương I: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng
Chương II: Quan hệ song song
Chương III: Quan hệ vuông góc
Chương IV: Mặt cầu và mặt tròn xoay
Chương V: Diện tích và thể tích

bao gồm 21 chủ đề, miêu tả chi tiết phương pháp giải cho 48 dạng toán cơ bản và nâng cao của hình học 11.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Nhóm Cự Môn
Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ -Hà Nội

Hà nội, ngày 2 tháng 9 năm 2005
NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1

MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là "*điểm*", "*đường thẳng*" và "*mặt phẳng*".

1. QUAN HỆ THUỘC

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A *thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \in d$.
- Điểm A *không thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $a \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng α có thể xảy ra hai trường hợp:

- Điểm A *thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \in \alpha$.
- Điểm A *không thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $a \notin \alpha$.

2. CÁC TIÊN ĐỀ

Tiên đề 1: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tiên đề 2: *Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.*

Tiên đề 3: *Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.*

Tiên đề 4: *Có ít nhất bốn điểm không đồng phẳng.*

3. NHỮNG KẾT QUẢ MỞ ĐẦU

Định lí 1: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất và chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Khi đó, đường thẳng chung được gọi là *giao tuyến* của hai mặt phẳng.

Định lí 2: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.*

Định lí 3: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau.*

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng α. Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng α không có điểm chung, tức là:

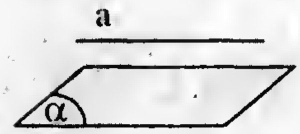
$$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a \parallel \alpha.$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng α chỉ có một điểm chung, tức là:

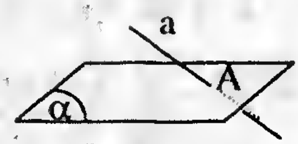
$$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } \alpha \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng α có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

$$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha.$$



$a \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow a // \alpha$



$a \cap \alpha = \{A\} \Leftrightarrow$ a cắt α

$a \cap \alpha = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset \alpha$

5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cho 2 mặt phẳng α và β. Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng α và β không có đường thẳng chung, tức là:

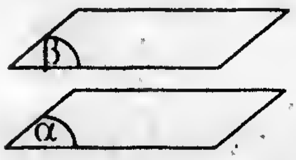
$$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha // \beta.$$

b. Hai mặt phẳng α và β chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

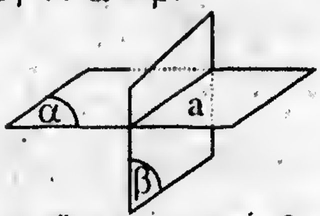
$$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow \alpha \text{ cắt } \beta.$$

c. Hai mặt phẳng α và β có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

$$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta.$$



$\alpha \cap \beta = \varnothing \Leftrightarrow \alpha // \beta$



$\alpha \cap \beta = a \Leftrightarrow \alpha$ cắt β

$\alpha \cap \beta = \{a, b\} \Leftrightarrow \alpha \equiv \beta$

6. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho 2 đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset \alpha \wedge b \subset \alpha \\ a \cap b = \phi \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

$$a \text{ cắt } b \Leftrightarrow a \cap b = \{I\}.$$

c. Hai đường thẳng trùng nhau: có hai điểm chung phân biệt.

$$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

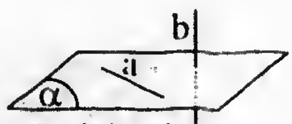
d. Hai đường thẳng chéo nhau: không cùng thuộc một mặt phẳng.

a chéo b ⇔ a, b không đồng phẳng.

a//b

a cắt b

a≡b



a,b chéo nhau

7. CÁCH XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

7.1. Cách xác định đường thẳng

Có ba cách xác định một đường thẳng:

Cách 1: Biết hai điểm phân biệt A, B của đường thẳng. Kí hiệu (AB).

Cách 2: Biết một điểm của đường thẳng và phương của đường thẳng đó.

Cách 3: Biết hai mặt phẳng phân biệt cùng chứa đường thẳng cần tìm.

7.2. Cách xác định mặt phẳng

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Biết 3 điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Biết 1 điểm A và một đường thẳng d không chứa A của mặt phẳng, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Biết 2 đường thẳng cắt nhau a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

Cách 4: Biết 2 đường thẳng song song a, b của mặt phẳng, kí hiệu (a, b).

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Sử dụng các tiên đề xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để biết khi nào một điểm thuộc một mặt phẳng, ta có các kết quả sau:
   - Giả sử α là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C thì khi đó A, B, C đều thuộc α.
   - Nếu đường thẳng a chứa trong mặt phẳng α, thì khi đó điểm M thuộc a đều thuộc α.
2. Để chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α ta đi chứng minh tồn tại hai điểm phân biệt A, B thuộc a và thuộc α.
   - Nếu mặt phẳng α cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Đường thẳng a nằm trong một mặt phẳng cố định α*".
   - Nếu hai điểm A, B cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Mặt phẳng α chứa một đường thẳng cố định* a".
3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b chéo nhau, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, cụ thể:
   - Giả sử a, b không chéo nhau, tức là có một mặt phẳng α chứa cả a và b.
   - Suy ra một kết luận vô lý (trái với giả thiết hoặc trái với các tiên đề, các định lí).
   - Kết luận rằng hai đường thẳng a, b chéo nhau.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.

Giải

Với ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Giả sử:

$$a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ c \cap a = \{C\}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt.

Do a, b, c phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC). Ta có:

- Đường thẳng a có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên $a \in (ABC)$.
- Tương tự $b \in (ABC)$ và $c \in (ABC)$.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng (ABC).

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử A ≡ B.

Nếu A $\neq$ C thì a $\equiv$ c, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có:

$$A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow a, b, c \text{ đồng quy.}$$

Vậy, ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho góc $\widehat{xOy}$. A là điểm ngoài α. M, N là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy.

1. Giả sử OM = ON. Chứng minh rằng trung tuyến AP của ΔAMN luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.
2. Gọi d là đường thẳng cố định qua A và cắt α tại một điểm không thuộc Ox, Oy. MN di động nhưng luôn cắt d.
   a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
   b. Gọi B là điểm cố định trên d, $B \neq A$ và không thuộc α. AM và BN cắt nhau tại Q. Chứng minh rằng Q thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định. Suy ra Q thuộc một đường thẳng cố định.

Giải

1. Ta có:

$$OM = ON \Rightarrow P \text{ thuộc Oz là tia phân giác của góc } \widehat{xOy} \text{ – cố định.}$$

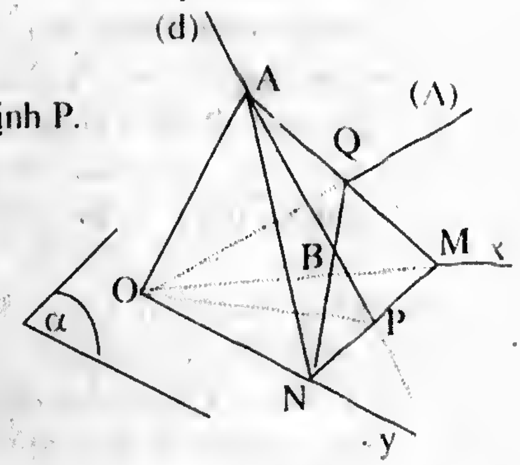
Vậy, trung tuyến AP nằm trong mặt phẳng cố định (A, Oz).

2. Giả sử $d \cap \alpha = \{P\}$ – cố định.

a. Ta có ngay:

$$d \cap MN = \{P\} \text{ cố định.}$$

Vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định P.



b. Ta có:

- $Q \in BN \subset (B, Oy)$ – cố định
  $\Rightarrow Q \in (B, Oy)$ – cố định.
- $Q \in AM \subset (A, Ox)$ – cố định
  $\Rightarrow Q \in (A, Ox)$ – cố định.

Vậy, điểm Q thuộc đường thẳng cố định Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A, Ox) và (B, Oy).

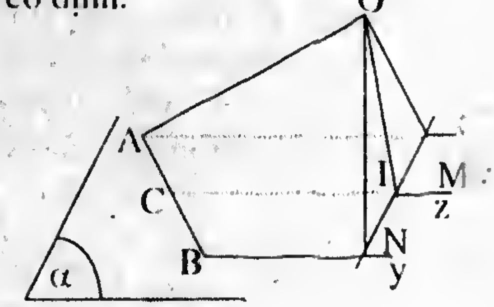
Ví dụ 3: Trong mặt phẳng α, cho hai nửa đường thẳng song song Ax, By. M và N là hai điểm lần lượt thuộc Ax và By; $M \neq A$ và $N \neq B$. O là điểm cố định không thuộc α.

a. Chứng minh rằng OA và MN chéo nhau.

b. M, N di động, chứng tỏ rằng đường thẳng OI nối O với trung điểm I của MN nằm trong mặt phẳng cố định.

c. M, N di động nhưng AM + BN có giá trị không đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Giải



a. Ta đi chứng minh bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử OA và MN không chéo nhau tức chúng cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt phẳng này chứa ba điểm A, M, N không thẳng hàng, đó chính là mặt phẳng α, suy ra:

$O \in \alpha$, trái với giả thiết.

Vậy, OA và MN chéo nhau.

b. Gọi C là trung điểm AB, nhận xét rằng:

ABNM là hình thang

$\Rightarrow I \in Cz$ là đường trung bình của ABNM – cố định

Vậy, OI nằm trong mặt phẳng cố định (O, Cz).

c. Xét hình thang ABNM, ta có:

$$CI = \frac{1}{2}(AM + BN) \text{ – không đổi} \Rightarrow I \text{ cố định.}$$

Vậy, mặt phẳng (OMN) chứa đường thẳng OI cố định.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α và một đường thẳng b cắt α tại điểm O. Chứng minh rằng nếu điểm O không thuộc a thì a và b chéo nhau.

Bài tập 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Trên a lấy hai điểm phân biệt A, B, trên b lấy hai điểm phân biệt C, D.

a. Chứng minh rằng AC và BD chéo nhau.

b. M là một điểm trên cạnh AC, N là một điểm trên cạnh BD. MN có thể song song với AB hoặc CD được không ?

c. O là điểm trên MN. Chứng minh rằng AO cắt CN, và BO cắt DM.

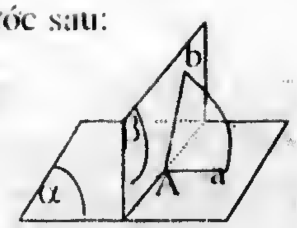
Bài toán 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng.

Bước 2: Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến.



Chú ý: Để tìm điểm chung của hai mặt phẳng ta thường tìm hai đường thẳng đồng phẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó. Giao điểm, nếu có, của hai đường thẳng này chính là điểm chung của hai mặt phẳng.

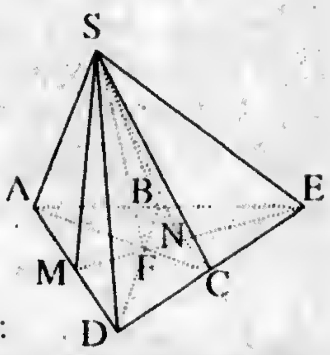
<u>**Ví dụ 1:**</u> Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F, S là một điểm không thuộc α.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

c. Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Giải



a. Ta có ngay S là điểm chung của (SAB) và (SCD).

Mặt khác:

$E \in AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$.

$E \in CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD)$.

Vậy, ta được $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Tương tự câu a), ta được $SF = (SAC) \cap (SBD)$.

c. Giả sử EF cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Khi đó:

- (SEF) và (SAD) có hai điểm chung là S và M nên có giao tuyến là SM.

- (SEF) và (SBC) có hai điểm chung là S và N nên có giao tuyến là SN.

Chú ý: Trong câu c) chúng ta đã sử dụng ý tưởng trong phần chú ý của bài toán 2 để thực hiện tìm điểm chung thứ hai, cụ thể:

- Trong mặt phẳng (SEF) ta chọn đường thẳng EF.
- Trong mặt phẳng (SBC) ta chọn đường thẳng BC.
- Ta có EF và BC cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) và $EF \cap BC = \{N\}$.
- Do đó N là điểm chung của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Đối với ví dụ trên, điều này rất trực quan và thấy ngay được. Tuy nhiên, một vài bài toán các em học sinh cần hiểu được bản chất của vấn đề mới có được lựa chọn thích hợp.

<u>Ví dụ 2:</u> Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

Giải

Đường thẳng MN cắt AB, AD và AC tại M_1, N_1 và O_1. Khi đó:

- Nối O_1P cắt SA tại P_1.
- Nối M_1P_1 cắt SB tại M_2.
- Nối N_1P_1 cắt SD tại N_2.

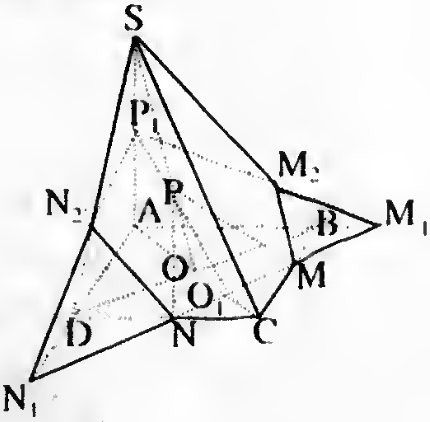
Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAB) = P_1M_2$.

$(MNP) \cap (SAD) = P_1N_2$.

$(MNP) \cap (SBC) = MM_2$.

$(MNP) \cap (SCD) = NN_2$.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt phẳng (ACD) và (ABD).

Bài tập 2: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. M là một điểm bên trong ΔABD, N là một điểm bên trong ΔACD.

a. Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD).

b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC).

Bài tập 3: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. O là điểm bên trong ΔBCD, M là điểm trên AO.

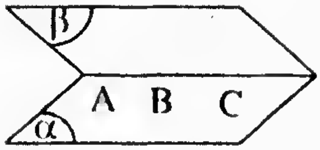
a. Tìm giao tuyến của (MCD) với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

b. I, J là hai điểm trên BC và BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

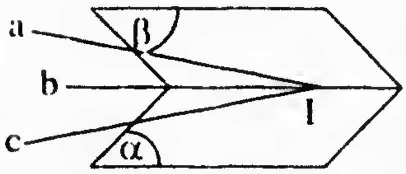
Bài tập 4: Trong mặt phẳng α, cho hình bình hành ABCD tâm O, S là một điểm không thuộc α. M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. P là điểm trên SC và SP > PC. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SAC) và (ABCD).

Bài toán 3:	Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Ba đường thẳng đồng quy.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



1. Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

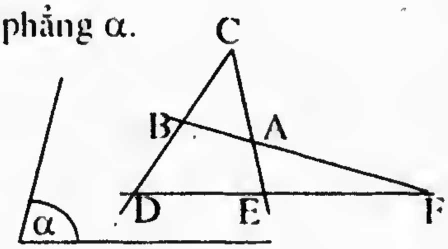


2. Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.

Ví dụ 1: Cho mặt phẳng α và ba điểm A, B, C không thẳng hàng ở ngoài α. Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt α tại D, E, F. Chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Giải

Trước tiên, ta thấy ngay ba điểm D, E, F thuộc mặt phẳng α.



Mặt khác, ta có::

$D \in BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC)$.

$E \in CA \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC)$.

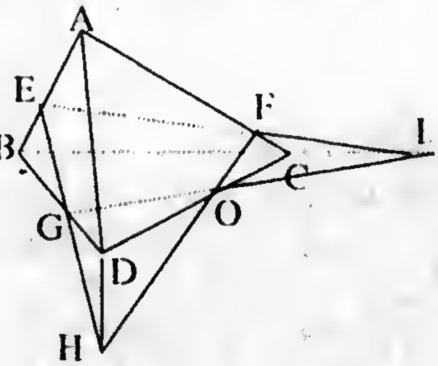
$F \in AB \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC)$.

Vậy, ta được:

$(ABC) \cap \alpha = \{D, E, F\} \Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho ΔBCD, A là một điểm không thuộc α. Gọi E, F, G lần lượt là 3 điểm trên 3 cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh CD, IG, HF đồng quy.

Giải



Gọi O là giao điểm của HF và IG. Ta có:

$O \in HF \subset (ACD) \Rightarrow O \in (ACD)$.

$O \in IG \subset (BCD) \Rightarrow O \in (BCD)$.

Suy ra:

$O \in (ACD) \cap (BCD) = CD$.

Vậy, ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy tại O.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai điểm A và B nằm trong mặt phẳng α và một điểm O nằm ngoài α. Lấy M, N theo thứ tự thuộc OA và OB, với $M \neq O$, $M \neq A$, $N \neq O$, $N \neq A$. Giả sử MN cắt α tại C. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 2: Cho mặt phẳng α và 2 điểm A, B cố định ở ngoài α. M là điểm di động trong không gian sao cho MA, MB cắt α tại A_1, B_1. Chứng minh A_1B_1 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng α, cho ΔABC, D là một điểm không thuộc α. Qua C dựng mặt phẳng γ cắt AB, BD tại B_1, B_2, qua B dựng mặt phẳng β cắt AC, CD tại C_1, C_2. BB_1, CC_1 cắt nhau tại O_1; BB_2, CC_2 cắt nhau tại O_2. Giả sử O_1O_2 kéo dài cắt SA tại I.

a. Chứng minh AO_1, DO_2, BC đồng quy.

b. Chứng minh I, B_1, B_2 và I, C_1, C_2 thẳng hàng.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với SI > IA và SJ < JC. Một mặt phẳng β quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN và SO đồng quy; (O là giao điểm của AC và BD). Suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.

b. AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c. IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi α di động.

Bài toán 4: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

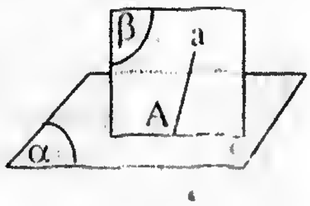
Cho đường thẳng a và mặt phẳng α, giả sử a cắt α. Để tìm giao điểm A của a và α, ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu trong mặt phẳng α có sẵn một đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó thì A chính là giao điểm của a và α.

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ β chứa a sao cho giao tuyến c của α và β dễ xác định.

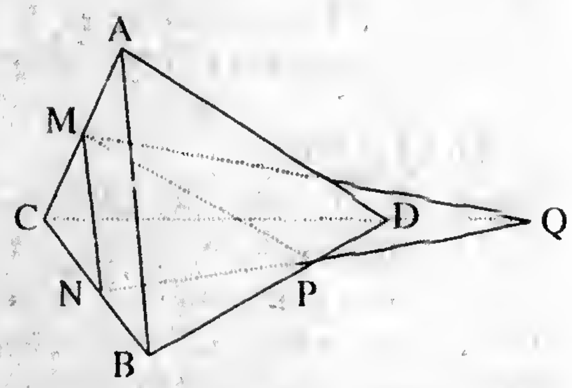
Bước 2: Trong β, đường thẳng c cắt a tại điểm A nào đó, thì A là giao điểm của a và α.



<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD.

a. Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).

b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).



Giải

a. Từ giả thiết về điểm N và P ta gọi:

$Q = CD \cap NP \subset (MNP)$

$\Rightarrow Q = CD \cap (MNP)$.

b. Ta có ngay:

$(MNP) \cap (ACD) = MQ$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. M là điểm trên cạnh SC.

a. Tìm giao điểm của AM và (SBD).

b. Gọi N là một điểm trên cạnh BC, tìm giao điểm của SD và (AMN).

Giải

a. Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa AM.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra:

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$SO \cap AM = O_1 \Rightarrow AM \cap (SBD) = O_1$.

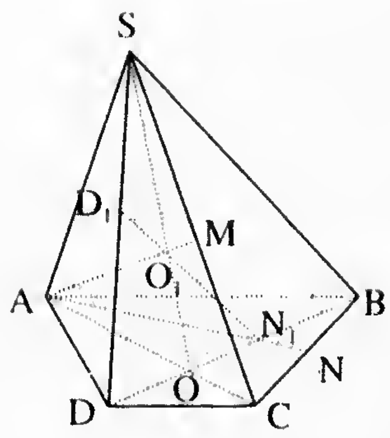
b. Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

Gọi N_1 là giao điểm của AN và BD, suy ra:

$(SBD) \cap (AMN) = N_1O_1$.

Trong mặt phẳng (SBD), ta có:

$N_1O_1 \cap SD = D_1 \Rightarrow SD \cap (AMN) = D_1$.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là một điểm bên trong ΔBCD.

a. Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).

b. Tìm giao điểm của BC và BD với (OMN).

Bài tập 2: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N. Gọi O là một điểm bên trong ΔBCD.

a. Tìm giao điểm của MN và (ABO).

b. Tìm giao điểm của AO và (BMN).

Bài tập 3: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Lấy I, J lần lượt là hai điểm bên trong ΔABC và ΔABD. M là điểm tuỳ ý trên CD. Tìm giao điểm của IJ và (ABM).

Bài tập 4: Trong mặt phẳng α, cho hình thang ABCD đáy lớn AB. S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J, K theo thứ tự là ba điểm thuộc SA, AB, BC.

a. Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b. Tìm giao điểm của (IJK) với SD và SC.

Bài toán 5: Bài toán dựng hình.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện theo bốn bước:

Bước 1: *Phân tích.*

Bước 2: *Cách dựng.*

Bước 3: *Chứng minh.*

Bước 4: *Biện luận.*

Ví dụ 1: Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và một điểm M không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng một đường thẳng qua M cắt cả hai a, b.

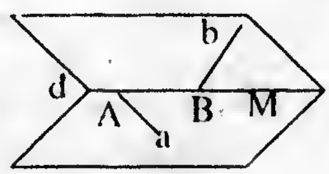
Giải

a. *Phân tích*: Giả sử dựng được đường thẳng d qua M cắt a, b theo thứ tự tại A và B, khi đó:

M, A thuộc d, nên $d \in (M, a)$.

M, B thuộc d, nên $d \in (M, b)$.

Suy ra $d = (M, a) \cap (M, b)$.



b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng mặt phẳng (M, a).
- Dựng mặt phẳng (M, b).
- Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (M, a) và (M, b).

Khi đó d là đường thẳng cần dựng.

c. *Chứng minh*: Ta thấy:

$d = (M, a) \cap (M, b)$, nên d đi qua M.

d, a thuộc (M, a), nên chúng có thể cắt nhau tại A.

d, b thuộc (M, b), nên chúng có thể cắt nhau tại B.

Vậy, d đi qua M có thể cắt cả a và b.

d. *Biện luận*: Nhận thấy:

- Nếu d cắt a và d cắt b, ta có nghiệm duy nhất.
- Nếu d // a hoặc d // b, bài toán vô nghiệm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. O là điểm bên trong ABCD. M là điểm trên AB.

a. Hãy dựng đường thẳng qua M cắt AO và CD.

b. N là điểm trên BC và ON không song song với BD. Dựng đường thẳng qua N cắt AO và DM.

Bài tập 2: Chứng minh rằng có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng cho trước đôi một chéo nhau.

Bài toán 6: (*Bài toán quỹ tích*): Tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng di động.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Gọi M là giao điểm hai đường thẳng đi động d_1, d_2. Để tìm tập hợp các điểm M ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Phần thuận*: Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa d_1 và d_2. M di động trên giao tuyến cố định d của hai mặt phẳng đó.

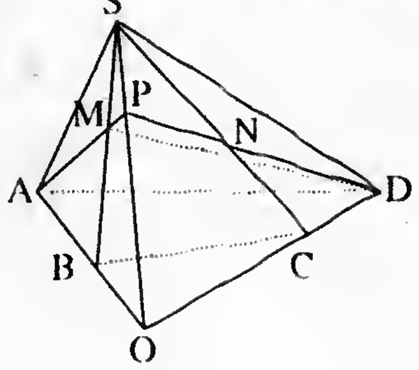
Bước 2: *Giới hạn* (nếu có) được tập $\bar{d}$.

Bước 3: *Phần đảo*: Gọi M là điểm bất kỳ trên $\bar{d}$, ta đi chứng minh M là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Bước 4: *Kết luận*.

Chú ý: Nếu d di động nhưng luôn đi qua điểm cố định A và cắt đường thẳng cố định a không qua A thì d thuộc mặt phẳng cố định (A, a).

__Ví dụ 1:__ Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD có AB và CD không song song. S là một điểm không thuộc α, M là điểm di động trên cạnh SB. Mặt phẳng (ADM) cắt SC tại N. Tìm tập hợp giao điểm của AM và DN.



Giải

Phần thuận: Ta có:

$AM \subset (SAB)$ – cố định.

Mặt khác, vì DN đi qua điểm cố định D và cắt đường thẳng cố định SC nên:

$DN \subset (SCD)$ – cố định.

Giả sử AB cắt CD tại O, ta có ngay:

$(SAB) \cap (SCD) = SO$.

Vậy, tập hợp giao điểm P của AM và định nghĩa thuộc đường thẳng SO.

Giới hạn: Khi M di chuyển trên cạnh SB thì P di chuyển trên đoạn SO.

Phần đảo: Gọi P là điểm bất kỳ trên SO.

- Nối AP cắt SB tại M.
- Nối DP cắt SC tại N, N là giao điểm của mặt phẳng (ADM) với SC và P chính là giao điểm của AM và DN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SO.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, AB và CD kéo dài cắt nhau tại E, AD và BC kéo dài cắt nhau tại F và AD < DF. S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. α là mặt phẳng di động qua IJ. α cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

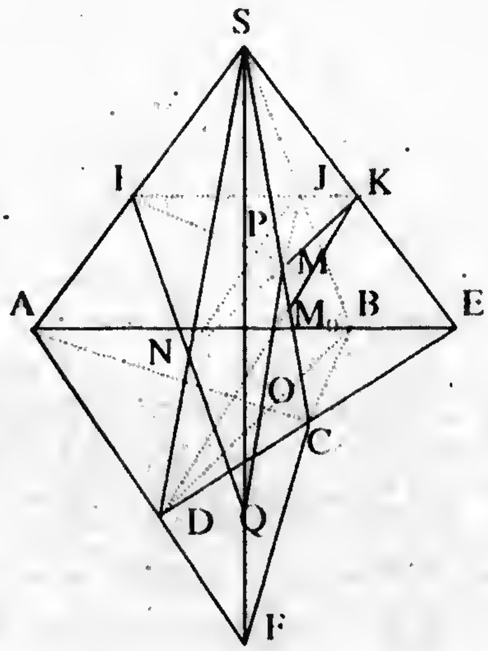
a. Chứng minh rằng IJ, MN, SE đồng quy.

b. M chuyển động trên phần nào của cạnh SC ?

c. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.

d. Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

Giải



a. Gọi $K = IJ \cap MN$, ta có:

$K \in IJ \subset (SAB) \Rightarrow K \in (SAB)$.

$K \in MN \subset (SCD) \Rightarrow K \in (SCD)$.

Do đó $K \in SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SE đồng quy tại K.

b. Nối KD cắt SC tại M_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia KMN quét góc $\widehat{SKD}$, do đó M chạy từ S đến M_0 vì khi đó α mới cắt cạnh SC, SD.

c. Gọi $P = IM \cap JN$. Ta đi tìm tập hợp điểm P.

Phần thuận: Ta có:

$P \in IM \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC)$.

$P \in JN \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD)$.

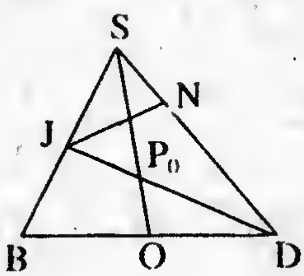
Do đó:

$P \in SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Giới hạn: Nối DJ cắt SO tại P_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia JPN quét góc $\widehat{SJD}$, do đó P chạy từ S đến P_0 vì khi đó α mới cắt cạnh SC, SD.

Phần đảo. Gọi P là điểm bất kỳ trên SP_0. Nối JP cắt SD tại N, nối IP cắt SC tại M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và P chính là giao điểm của IM và JN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SP_0 trên SO.



d. Gọi $Q = IN \cap JM$. Ta đi tìm tập hợp điểm Q.

Phần thuận: Ta có:

$Q \in IN \subset (SAD) \Rightarrow Q \in (SAD)$.

$Q \in JM \subset (SBC) \Rightarrow Q \in (SBC)$.

Do đó:

$Q \in SF = (SAD) \cap (SBC)$.

Giới hạn: Vì AD < DF, nên tia Ix song song với SF và cắt cạnh SD tại N_0. Vậy N chạy từ S tới N_0. Nối IN_0 cắt SF tại F_0, do đó Q chạy từ S đến F_0.

Phần đảo: Gọi Q là điểm bất kỳ trên SF_0. Nối IQ cắt SD tại N, nối JQ cắt SC tại M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và Q chính là giao điểm của IN và JM.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm Q là đoạn SF_0 trên SF.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, J là hai điểm cố định trên AB, AC và IJ không song song với BC. α là mặt phẳng quay quanh IJ. α cắt CD, BD lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
b. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.
c. Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng α cho hai đường thẳng d, d' cắt nhau tại O. A, B là hai điểm cố định ở ngoài α và AB không song song với α. Một mặt phẳng β quay quanh AB cắt d tại M và d' tại N. Chứng minh rằng:

a. MN luôn đi qua một điểm cố định.
b. Giao điểm I của AM và BN ở trên đường thẳng cố định.
c. Giao điểm J của AN và BM ở trên đường thẳng cố định.
d. IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng α, cho hình thang ABCD có các cạnh đáy là AB và CD với AB = 2CD. S là một điểm không thuộc α. Gọi I là trung điểm của SA, J là một điểm trên cạnh SC với JS > JC.

a. β là mặt phẳng quay quanh IJ, cắt SD, SB theo thứ tự tại M, N. M, N di động trên phần nào của đoạn SD, SB ? Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.
b. γ là mặt phẳng quay quanh IJ cắt AD tại P. Tìm giao điểm Q của γ và cạnh CD và tập hợp giao điểm của IQ và JP.

CHỦ ĐỀ 2

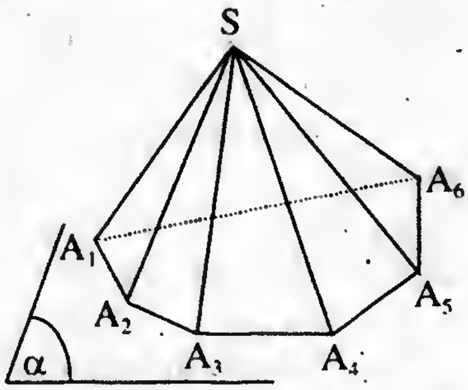
HÌNH CHÓP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng α cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài α. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$.

Hình tạo bởi n miền đa giác đó và miền đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.



Trong đó:

- Điểm S gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_{n-1}A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp.

Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Chú ý: Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện.

2. THIẾT DIỆN

Định nghĩa: Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng α là một đa giác phẳng tạo bởi các đoạn giao tuyến của α với các mặt bên hay mặt đáy của hình chóp.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Thiết diện của hình chóp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của α với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của α với các mặt khác. Từ đó xác định được giao tuyến với các mặt này.

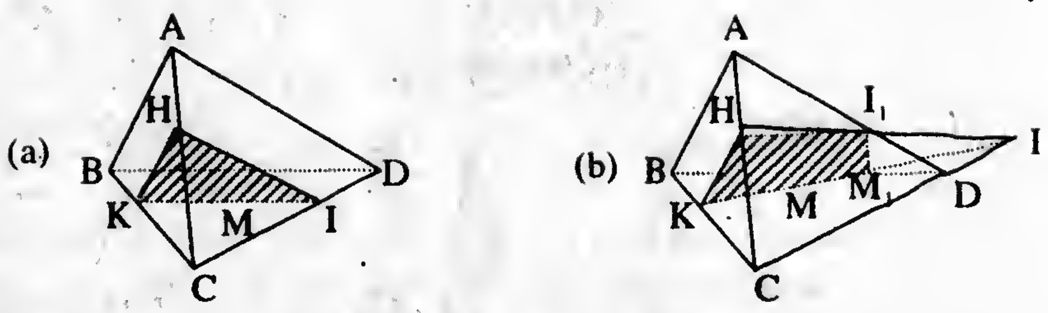
Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC. Trong ΔBCD lấy điểm M sao cho hai đường thẳng KM và CD cắt nhau. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM).

Giải

Gọi $I = KM \cap CD$. Ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: Điểm I thuộc đoạn CD (Hình a). Khi đó ta được ba đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó thiết diện cần tìm là ΔHIK.



Trường hợp 2: Điểm I ở ngoài đoạn CD (Hình b). Khi đó:

- Gọi $M_1 = KM \cap BD$.
- Nối IH cắt AD tại I_1.

Ta được 4 đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó thiết diện cần tìm là tứgiác HKM_1I_1.

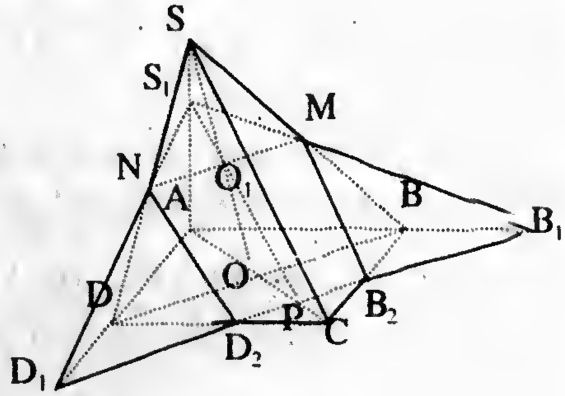
__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SD và OC.

a. Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và tìm giao điểm của SA với (MNP).

b. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP)

c. Tính tỷ số mặt phẳng (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD.

Giải



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối MN cắt SO tại O_1.
- Nối O_1P cắt SA tại S_1.

Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAC) = PS_1$.

$(MNP) \cap SA = S_1$.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối S_1N kéo dài cắt AD tại D_1.
- Nối S_1M kéo dài cắt AB tại B_1.
- Nối B_1D_1 cắt CD, CB theo thứ tự tại D_2, B_2.

Khi đó, ta được 5 đoạn giao tuyến là S_1M, MB_2, B_2D_2, D_2N và NS_1. Do đóhiết diện cần tìm là đa giác $S_1MB_2D_2N$.

c. Ta lần lượt có:

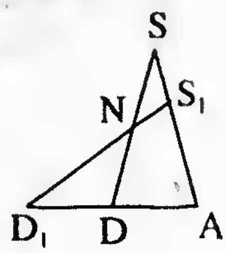
- MN là đường trung bình của ΔSBD nên O_1 là trung điểm SO, suy ra:

$$PO_1 // SC \Rightarrow \frac{S_1S}{S_1A} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}.$$

- Xét ΔSAD với S_1, N, D_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{NS}{ND} \cdot \frac{D_1D}{D_1A} \cdot \frac{S_1A}{S_1S} = 1$$

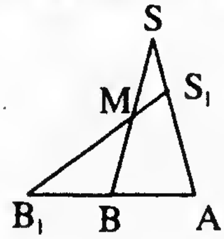
$$\Rightarrow \frac{D_1D}{D_1A} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$



- Xét ΔSAB với S_1, M, B_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{MS}{MB}\cdot\frac{B_1B}{B_1A}\cdot\frac{S_1A}{S_1S}=1$$

$$\Rightarrow \frac{B_1B}{B_1A}=\frac{1}{3}; \qquad (2)$$



Từ (1), (2), suy ra:

$BD // B_1D_1 \Rightarrow B_2D_2$ là đường trung bình của ΔCBD

$\Rightarrow$ nên B_2, D_2 theo thứ tự là trung điểm BC, CD

do đó:

$$\frac{D_2D}{D_2C}=1 \text{ và } \frac{B_2B}{B_2C}=1.$$

Chú ý: Định lí Mêlêlaus có nội dung như sau: " *Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC (hoặc trên phần kéo dài của chúng) lấy các điểm C_1, A_1, B_1 thì C_1, A_1, B_1 thẳng hàng khi và chỉ khi:* $\dfrac{A_1B}{A_1C}\dfrac{B_1C}{B_1A}\dfrac{C_1A}{C_1B}=1$ ".

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I là ba điểm lấy trên AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNI).

Bài tập 2: Cho hình chóp SABCD. M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD. Trong ΔSBC và ΔSCD lần lượt lấy điểm M, N.

a. Tìm giao điểm của MN và (SAC).

b. Tìm giao điểm của SC và (AMN).

c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AMN).

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a. Tìm giao điểm I của GM và mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng CD nằm trong mặt phẳng (CGM).

b. Chứng minh rằng (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (CGM).

c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AGM).

Bài toán 2: Diện tích của thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định thiết diện.

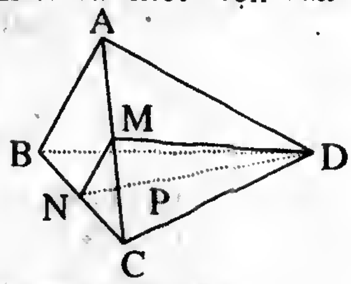
Bước 2: Diện tích thiết diện được tính thông qua diện tích tam giác và tứ giác dạng đặc biệt.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD, độ dài các cạnh bằng 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC, gọi P là trọng tâm ΔBCD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MNP).

Giải

a. *Xác định thiết diện.*

Trong ΔBCD, ta thấy ngay N, P, D thẳng hàng. Suy ra MND là thiết diện cần dựng.



b. *Tính diện tích thiết diện.*

Xét ΔMND, ta có ngay:

$MN = \frac{1}{2}AB = a$, vì MN là đường trung bình.

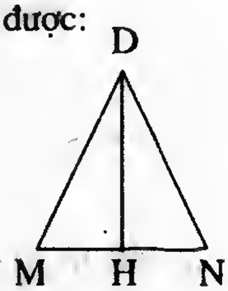
$ND = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, vì DN là đường trung tuyến trong tam giác đều.

$MD = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, vì DM là đường trung tuyến trong tam giác đều.

như vậyΔMND cân tại D, gọi H là chân đường cao hạ từ D, ta được:

$$S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN\sqrt{DM^2 - MH^2}$$

$$= \frac{1}{2}a.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}.$$



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng a. Kéo dài BC một đoạn CE = a. Kéo dài BD một đoạn DF = a. Gọi M là trung điểm AB.

a. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trọng tâm ΔACD

a. Tính độ dài IJ.

b. M là điểm di động trên đoạn BC. Tìm tập hợp giao điểm N của AM và (ICD).

c. Xác định thiết diện của tứ diện với (IGM) khi M là trung điểm của BC. Tính các tỉ số mà (IGM) chia các cạnh CD và AD. Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của nó.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài tập 1: Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác hoặc ngũ giác hay không ?

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

b. Tìm giao điểm của đường thẳng BM với mặt phẳng (SAC).

c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

Bài tập 3: Cho hai hình thang (không bình hành) ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a. Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

(ACE) và (BDF); (BCE) và (ADF).

b. Lấy điểm M trên đoạn DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE).

c. Chứng minh rằng hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD.

a. Chứng minh AG_1 và BG_2 cắt nhau. Gọi giao điểm này là I. Tính các tỉ số $\frac{IA}{IG_1}, \frac{IB}{IG_2}$.

b. Chứng minh I là trung điểm đoạn thẳng nối các trung điểm của AB và CD.

c. Chứng minh các đường thẳng đi qua đỉnh của tứ diện và trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại một điểm, điểm này gọi là trọng tâm của tứ diện.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABC. Gọi I, H theo thứ tự là trung điểm của SA và AB. Lấy điểm K trên đoạn SC sao cho CK = 3KS.

a. Tìm giao điểm đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK).

b. Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với mặt phẳng (ABC).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a. Tìm giao điểm I của BN và (SAC) và giao điểm J của MN và (SAC).

b. DM cắt AC tại K. Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (BCN).

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang ABCD với AB // CD và AB > CD. Gọi I là trung điểm của CS. Mặt phẳng α quay quanh AI cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh MN luôn đi qua điểm cố định.

b. IM kéo dài cắt BC tại P, IN kéo dài cắt CD tại Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

c. Tìm tập hợp giao điểm của IM và AN.

Bài tập 8: Cho tứ diện ABCD. Gọi I là điểm nằm trên đường thẳng BD nhưng không thuộc đoạn BD. Trong mặt phẳng (ABD), ta vẽ một đường thẳng qua I và cắt hai đoạn AB, AD theo thứ tự tại K và L. Trong mặt phẳng (BCD), ta vẽ một đường thẳng qua I và cắt hai đoạn CB, CD theo thứ tự tại M và N.

a. Chứng minh rằng 4 điểm K, L, M, N đồng phẳng.

b. Gọi O_1 là giao điểm của hai đường thẳng BN và DM, O_2 là giao điểm của hai đường thẳng BL và DK, và J là giao điểm của hai đường thẳng LM và KN. Chứng minh rằng ba điểm A, J, O_1 thẳng hàng và ba điểm C, J, O_2 thẳng hàng.

c. Giả sử hai đường thẳng KM và LN cắt nhau tại H. Chứng minh rằng H thuộc đường thẳng AC.

Bài tập 9: Cho hai mặt phẳng α và β cắt nhau theo giao tuyến m. Một đường thẳng d cắt α ở A và và cắt β ở B. Trên d ta lấy 2 điểm cố định S_1, và MS_2 cắt α tại M_1 M_2.

a. Chứng minh đường thẳng M_1 M_2 luôn đi qua một điểm cố định.

b. Giả sử đường thẳng M_1 M_2 cắt m tại K. Chứng minh rằng ba điểm K, B, M thẳng hàng

c. M chạy trên đường thẳng b cố định của mặt phẳng β (b không qua B và cắt m). Chứng minh M_1, M_2 chạy trên 2 đường thẳng cố định thuộc mặt phẳng α.

CHƯƠNG II

QUAN HỆ SONG SONG

CHỦ ĐỀ 1

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

2. CÁC ĐỊNH LÍ

Định lí 1: *Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng cho trước ta dựng được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

Tức là: với $B \notin a$ thì $\exists!$ b qua B và $b \,//\, a$.

Hệ quả 1: *Trong mặt phẳng α cho đường thẳng a và điểm $B \notin a$. Nếu từ B ta dựng đường thẳng b song song với a thì b nằm trong mặt phẳng α.*

Tức là:

$$\begin{cases} B \in \alpha \\ B \notin a \in \alpha \\ B \in b // a \end{cases} \Leftrightarrow b \subset \alpha.$$

Định lí 2: *Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào cắt đường thẳng này ắt phải cắt đường kia.*

Tức là:

$$\begin{cases} a // b \\ \alpha \cap a = A \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap b = B.$$

Định lí 3: *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tức là:

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

Định lí 4: *Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.*

Tức là, với α, β, γ phân biệt và thoả mãn:

$$\begin{cases} \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a // b // c \\ a, b, c \text{ đồng quy} \end{array} \right.$$

Hệ quả 2: *(Về giao tuyến) Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và lần lượt chứa hai đường thẳng song song cho trước thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng ấy.*

Tức là:

$$\begin{cases} a \in \alpha \text{ và } b \in \beta \\ a // b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow c // a // b.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai đường thẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

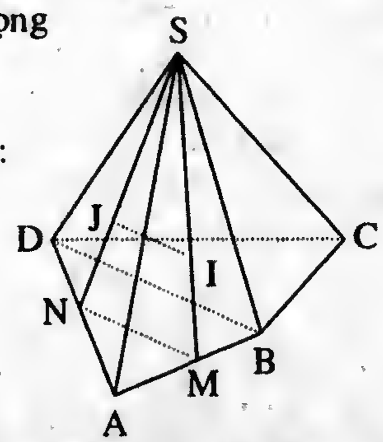
Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba,...).

Cách 2: Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.

Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến (định lí 4 hoặc hệ quả 2).

Ví dụ 1: Cho hình chóp SABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. Chứng minh rằng IJ // BD.



Giải

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AD, ta có:

$$\frac{SI}{SM} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // MN. \quad (1)$$

Mặt khác, trong ΔABD ta có MN là đường trung bình nên:

MN // BD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // BD.

Ví dụ 2: Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy AB và CD (AB > CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a. Chứng minh rằng MN // CD.
b. Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ADN).
c. Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh rằng SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì ?

Giải

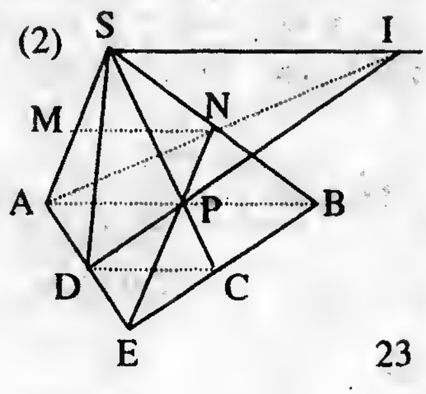
a. Trong ΔSAB, ta có:

MN // AB – tính chất đường trung bình. (1)

Mặt khác:

AB // CD – vì ABCD là hình thang đáy AB, CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // CD.



b. Gọi $E = AD \cap BC$.

$P = SC \cap EN \subset (ADN)$

$\Rightarrow P = SC \cap (ADN)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } CD \in (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \,//\, AB \,//\, CD.$$

Nhận xét rằng:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} SI \text{ và } MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} AB \Rightarrow SI \overset{//}{=} AB \Leftrightarrow SABI \text{ là hình bình hành.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔABC và ΔABD. Chứng minh rằng IJ // CD.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng MNPQ là hình bình hành.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh MNPQ là hình bình hành. Từ đó, suy ra 3 đoạn MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R, S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng nếu 4 điểm P, Q, R, S đồng phẳng thì:

a. Ba đường thẳng PQ, SR, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.
b. Ba đường thẳng PS, QR, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Bài tập 5: Cho ΔABC nằm trong mặt phẳng α. Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song và nằm về cùng một phía đối với α. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I khi M, N di động.
b. E thuộc đoạn AM và 3EM = EA, IE cắt AN tại F. Gọi Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng AQ song song với Bx và Cy và (QMN) chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a. Chứng minh rằng PQ // SA.
b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng điểm K nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên BC.
c. Qua Q dựng các đường thẳng Qx // SC và Qy // SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

Bài tập 7: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Có thể dựng hai đường thẳng song song cắt cả a và b không ?

Bài tập 8: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Chứng minh rằng tất cả các đường thẳng song song với a và cắt b đều nằm trong một mặt phẳng.

Bài toán 2:	Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng ngoài phương pháp " *Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng* ", ta sử dụng định lí 4, như sau:

Bước 1: Chỉ ra rằng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.

Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

Bước 3: Khi đó: $\alpha \cap \beta = Mx$ // a // b.

Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

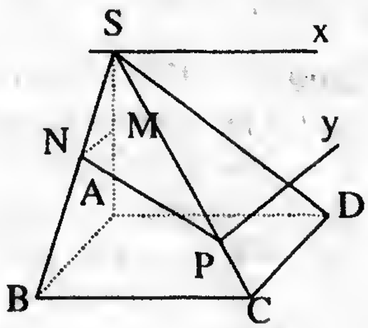
__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho 2SM = MA, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho 2SN = NB.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Chứng minh rằng MN // CD.

c. Điểm P nằm trên cạnh SC không trùng với S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases} \Rightarrow Sx \,//\, AD \,//\, BC.$$

b. Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2} \text{ và } \frac{SN}{NB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \,//\, AB. \quad (1)$$

Mặt khác, vì ABCD là hình bình hành nên AB // CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN // CD.

c. Ta có:

$$\begin{cases} MN \in (MNP) \text{ và } CD \in (SCD) \\ MN \,//\, CD \\ (SAB) \cap (SCD) = Py \end{cases} \Rightarrow Py \,//\, MN \,//\, CD.$$

__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, các cạnh đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔSAD, ΔSBC.

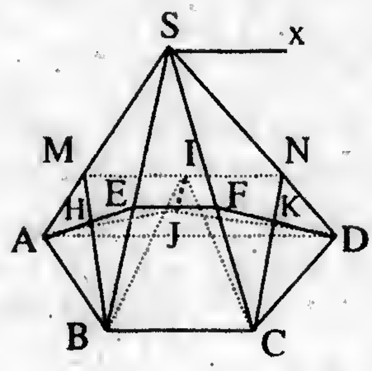
a. Tìm giao tuyến của (SAD) với (SBC).

b. Tìm giao tuyến của (BCI) với (SAD).

c. Tìm giao tuyến của (ADJ) với (SBC)

d. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases}$$

$\Rightarrow Sx \,//\, AD \,//\, BC.$

b. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (BCI) \\ AD // BC \\ (SAD) \cap (BCI) = Iy \end{cases} \Rightarrow Iy // AD // BC$$

và Iy cắt SA, SD theo thứ tự tại M, N.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADJ) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADJ) \cap (SBC) = Jz \end{cases} \Rightarrow Jz // AD // BC$$

và Jz cắt SB, SC theo thứ tự tại E, F.

đ. Giả sử AE cắt BM tại H và CN cắt DF tại K, và ta cần đi tính độ dài HK.

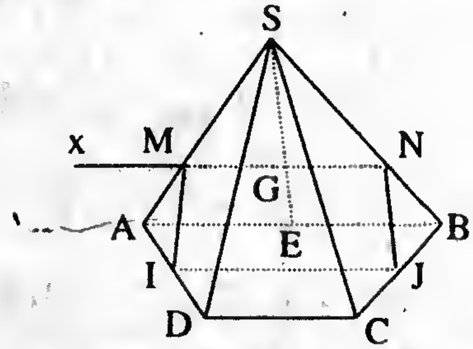
Bạn đọc tự làm dựa trên định lí Ta – lét, đáp số $HK = \frac{2}{5}(a + b)$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB, CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm ΔSAB.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì ? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } IJ \in (IJG) \\ AB // IJ \\ (SAB) \cap (IJG) = Gx \end{cases}$$

$\Rightarrow Gx // AB // IJ.$

b. Giả sử Gx cắt SA, SB theo thứ tự tại M, N. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IM, MN và NJ. Do đó thiết diện là hình thang MNJI.

Ta có:

$$MN // AB \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}AB.$$

$$II = \frac{1}{2}(AB + CD) \text{ – tính chất đoạn trung bình.}$$

Để hình thang MNJI là hình bình hành điều kiện là:

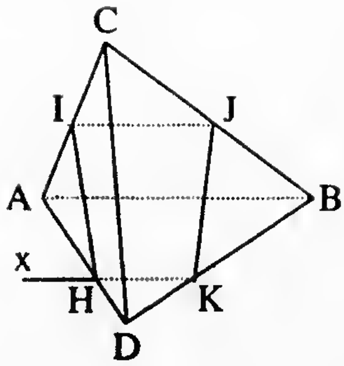
$$MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD.$$

Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD, các cạnh bằng nhau và bằng 6a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Gọi K là một điểm trên cạnh BD với KB = 2KD.

a. Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (IJK). Chứng minh thiết diện là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a.

Giải



c. Ta có:

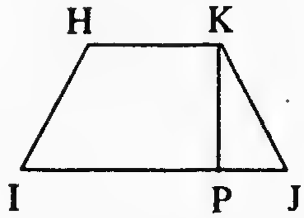
$$\begin{cases} AB \in (ABD) \text{ và } IJ \in (IJK) \\ AB // IJ \qquad\qquad \Rightarrow Kx // AB // IJ. \\ (ABD) \cap (IJK) = Kx \end{cases}$$

Giả sử Kx cắt AD theo thứ tự tại H. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IH, HK và KJ. Do đó thiết diện là hình thang IJKH.

Mặt khác, ta thấy ngay:

$\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow IH = JK.$

Vậy, thiết diện IJKH là hình thang cân.



d. Trong ΔABC, ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}AB = 3a.$$

Trong ΔABD, ta có:

$$\frac{HK}{AB} = \frac{KD}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}AB = 2a.$$

Trong ΔBJK, ta có:

$BJ = 3a,\ BK = 4a$

$$JK^2 = BJ^2 + BK^2 - 2BJ.BK.\cos\widehat{KBJ}$$
$$= (3a)^2 + (4a)^2 - 2.3a.4a.\cos 60^0 = 13a^2$$
$$\Rightarrow JK = a\sqrt{13}.$$

Xét hình thang IJKH, hạ đường cao KP, ta có:

$$KP = \sqrt{JK^2 - PJ^2} = \sqrt{JK^2 - \left(\frac{IJ - HK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}.$$

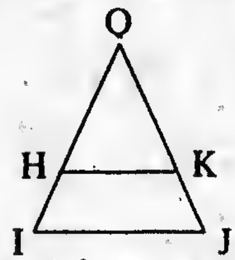
$$S_{IJKH} = \frac{1}{2}(IJ + HK).KP = \frac{1}{2}(3a + 2a).\frac{a\sqrt{51}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

Nhận xét: Trong lời giải câu b), vì thiết diện IJKH là hình thang cân nên việc tính diện tích của nó khá đơn giản. Trong nhận xét này, chúng ta cùng xem xét một đề xuất khác để tính được diện tích thiết diện và nó đặc biệt có ích trong trường hợp thiết diện là những đa giác không có dạng đặc thù.

Kéo dài IH và JK, chúng cắt nhau tại Q.

Khi đó:

$S_{IJKH} = S_{\Delta QIJ} - S_{\Delta QHK}.$



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Trên đoạn BD lấy điểm P .

a. Tìm giao tuyến của (DMN) với (BCD).

b. Tìm giao tuyến của (MNP) với (BCD).

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAD. M là trung điểm CD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJM).

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b. Lấy điểm M tuỳ ý trên cạnh SC nhưng không trùng với S, mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tứ giác ABMN là hình gì ?

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên SAB là tam giác đều. Ngoài ra $\widehat{SAD} = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D song song với SC.

a. Tìm giao điểm I của Dx với mặt phẳng (SAB). Chứng minh AI // SB.

b. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI). Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều. Cho $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a. Chứng minh HKMN là hình thang cân.

b. Đặt $AM = x$ $(0 \le x \le a)$, tính diện tích của tứ giác HKMN theo a, x. Tính x để diện tích này nhỏ nhất.

c. Tìm tập hợp giao điểm của HM và KN; của HN và KM.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. I, J lần lượt là trung điểm của SB, AB. M là một điểm bất kỳ trên nửa đường thẳng Ax chứa C. Biện luận theo vị trí của điểm M trên Ax các dạng của thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJM).

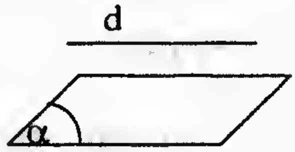
CHỦ ĐỀ 2

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

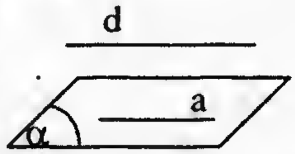
1. ĐỊNH NGHĨA

Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.



2. CÁC TÍNH CHẤT

***Định lí 1**: Điều kiện cần và đủ để một đường thẳng song song với một mặt phẳng là đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng và song song với một đường thẳng nào đó chứa trong mặt phẳng.*



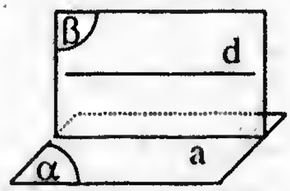
Tức là, với $d \not\subset \alpha$ thì nếu:

$$d \,//\, a \subset \alpha \Rightarrow d \,//\, \alpha.$$

***Định lí 2**: Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng α thì bất kỳ một mặt phẳng nào chứa d mà cắt α thì sẽ cắt mặt phẳng đó theo một giao tuyến song song với d.*

Tức là:

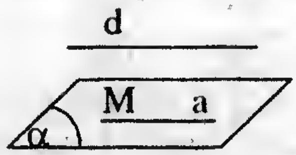
$$\begin{cases} d \,//\, \alpha \\ d \subset \beta \cap \alpha = a \end{cases} \Rightarrow d \,//\, a.$$



***Hệ quả**: Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α. Nếu từ một điểm M của α dựng đường thẳng a song song với d thì đường thẳng a nằm trong mặt phẳng α.*

Tức là:

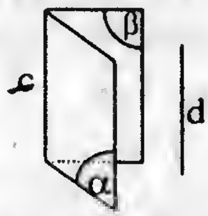
$$\begin{cases} d \,//\, \alpha \\ M \in \alpha \\ M \in a \,//\, d \end{cases} \Rightarrow a \subset \alpha.$$



***Định lí 3**: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha \cap \beta = c \\ \alpha \,//\, d \\ \beta \,//\, d \end{cases} \Rightarrow d \,//\, c.$$



***Định lí 4**: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Qua đường thẳng này, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với đường thẳng kia.*

Tức là, với a, b chéo nhau thì:

$$\exists!\ \alpha: \begin{cases} a \subset \alpha \\ \alpha \,//\, b \end{cases}.$$

***Hệ quả**: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Từ một điểm bất kỳ không thuộc mặt phẳng chứa đường thẳng này song song với đường thẳng kia, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với 2 đường thẳng đã cho.*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng α ta chứng minh d không nằm trong α và song song với một đường thẳng a chứa trong α.

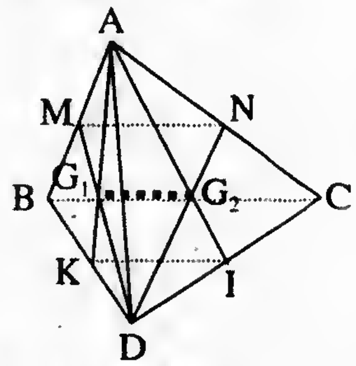
Chú ý: Nếu a không có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng β chứa d và nhận a làm giao tuyến của α và β.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABD và ΔACD. Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD.



Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_1}{DM} = \frac{2}{3}.$$

Trong ΔACD, ta có ngay:

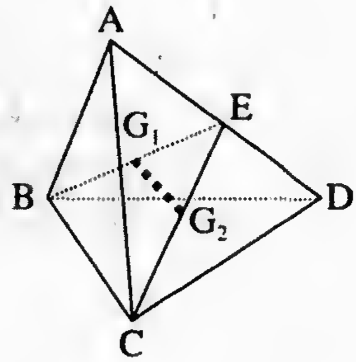
$$\frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, KI \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (BCD).$$

$$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (ABC).$$

Cách 2: Gọi E là trung điểm của AD.



Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{2}{3}.$$

Trong ΔACD, ta có ngay:

$$\frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3}.$$

Từ đó, ta có:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \,//\, BC$$

Vì BC thuộc (BCD) và (ABC) nên $G_1G_2 \,//\, (BCD)$ và $G_1G_2 \,//\, (ABC)$.

Ví dụ 2: Cho chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Gọi P là trung điểm của SA.

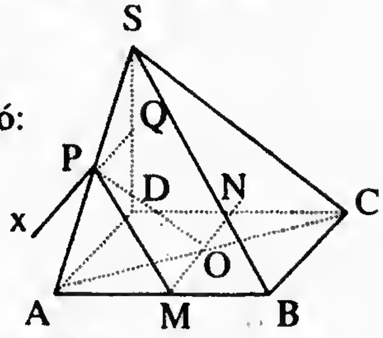
a. Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).
b. Chứng minh rằng SB song song với (MNP).
c. Chứng minh rằng SC song song với (MNP).
d. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và ΔSBC. Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD).

Giải

a. Trong hình bình hành ABCD, ta có MN là đường trung bình, do đó:

$MN \,//\, BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \,//\, (SBC)$.

$MN \,//\, AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \,//\, (SAD)$.



b. Trong ΔSAB, ta có MP là đường trung bình, do đó:

$SB \,//\, MP \subset (MNP) \Rightarrow SB \,//\, (MNP)$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } MN \in (MNP) \\ AD \,//\, MN \\ (SAD) \cap (MNP) = Px \end{cases} \Rightarrow Kx \,//\, AD \,//\, MN.$$

Giả sử Px cắt SD tại Q, suy ra Q là trung điểm SD.

Trong ΔSCD, ta có NQ là đường trung bình, do đó:

$SC \,//\, NQ \subset (MNP) \Rightarrow SC \,//\, (MNP)$.

Cách 2: Gọi O là trung điểm MN, suy ra O là trung điểm AC.

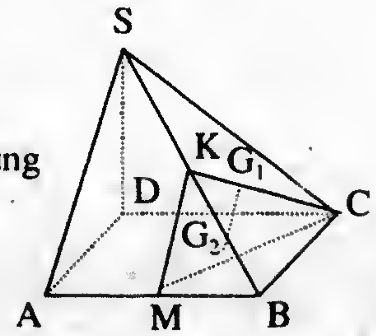
Trong ΔSAC, ta có OP là đường trung bình, do đó:

$SC \,//\, OP \subset (MNP) \Rightarrow SC \,//\, (MNP)$.

d. Gọi K là trung điểm SB. Ta có:

$\dfrac{CG_1}{CK} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{CG_2}{CM} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow G_1G_2 \,//\, MK$. (1)



Mặt khác, trong ΔSAB, ta có MK là đường trung bình, do đó:

$MK \,//\, SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$G_1G_2 \,//\, SA \subset (SAD) \Rightarrow G_1G_2 \,//\, (SAD)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng α.

a. Giả sử $a \,//\, b$ và $b \,//\, \alpha$, có thể kết luận gì về vị trí tương đối của a với α.

b. Giả sử $a \,//\, \alpha$ và $b \,//\, \alpha$, có thể kết luận gì về vị trí tương đối của a với b.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm tam giác ABD. M là một điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG song song với (ACD).

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a. Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b. M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh MN song song với (CDEF).

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng:

a. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là:

$$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}.$$

b. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD) là BC = BD và AC = AD.

Bài toán 2:	Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện song song với một đường thẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

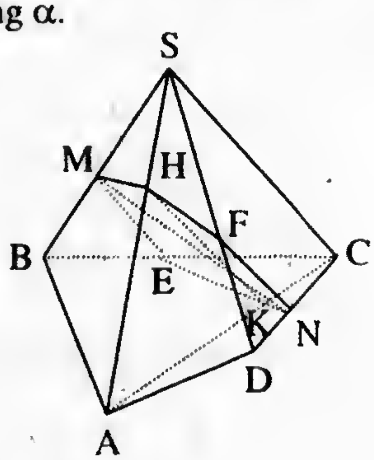
1. Tìm phương giao tuyến bằng định lí 2 hoặc định lí 3.
2. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước theo phương pháp đã biết.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm bất kì trên SB và CD. α là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a. Tìm các giao tuyến của α với các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng α.

Giải



a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} SC // \alpha \\ Mx \in (SBC)\cap\alpha \\ Ny \in (SCD)\cap\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} Mx // SC \text{ và } Mx \text{ cắt } BC \text{ tại } E. \\ Ny // SC \text{ và } Ny \text{ cắt } SD \text{ tại } F. \end{array}\right.$$

Gọi K là giao điểm của EN với AC, ta có:

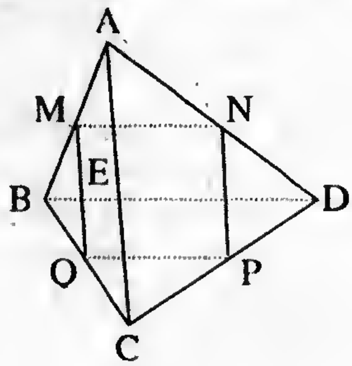
$$\begin{cases} SC // \alpha \\ SC \subset (SAC) \\ Kz \in (SAC)\cap\alpha \end{cases} \Rightarrow Kz // SC$$

và Kz cắt SA tại H.

b. Nối MH, FH ta được ngũ giác MENFH chính là thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng α.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho tứ diện đều ABCD. Gọi E là điểm nằm trong ΔABC. Mặt phẳng α qua E song song với các đường thẳng AC và BD. Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng α. Thiết diện là hình gì ?

Giải



Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} AC // \alpha \\ AC \subset (ABC) \\ Ex \in (ABC)\cap\alpha \end{cases} \Rightarrow Ex // AC$$

và Ex cắt AB và BC theo thứ tự tại M và Q.

$$\begin{cases} BD // \alpha \\ My \in (ABD) \cap \alpha \\ Qz \in (CBD) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} My // BD \text{ và } My \text{ cắt } AD \text{ tại } N. \\ Qz // BD \text{ và } Qz \text{ cắt } CD \text{ tại } P. \end{array} \right.$$

Ba mặt phẳng α, (ABC) và (ACD) cắt nhau theo ba giao tuyến MQ, AC, NP và MQ // AC nên MQ // NP.

Vậy, thiết diện MNPQ là hình bình hành.

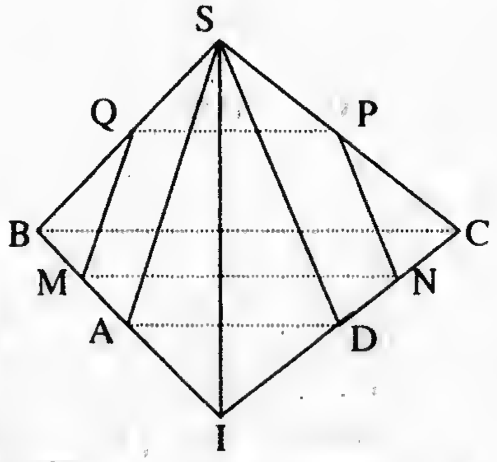
<u>**Ví dụ 3:**</u> Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang có đáy lớn BC = 2a, AD = a, AB = b. Mặt bên SAD là tam giác đều. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AB và song song với SA và BC, α cắt CD, SC, S B lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AM, (0 < x < b). Tính giá trị lớn nhất của diện tích.

Giải

a. Ta lần lượt có:



$$\begin{cases} SA // \alpha \\ SA \subset (SAB) \\ MQ \in (SAB) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MQ // SA.$$

$$\begin{cases} BC // \alpha \\ MN \in (ABCD) \cap \alpha \\ PQ \in (SBC) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MN // PQ // BC.$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SD} \overset{SA=SD}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Giả sử AB cắt CD tại I, ta có:

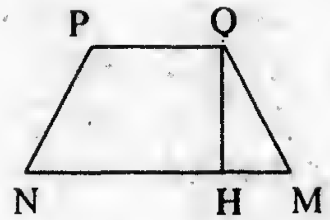
$$AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC \Rightarrow AD \text{ là đường trung bình của } \Delta IBC$$

do đó IA = AB = b và:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{IM}{IB} = \frac{IA + AM}{IA + AB} = \frac{b + x}{2b} \Rightarrow MN = \frac{a(b + x)}{b}.$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{b} \Rightarrow PQ = \frac{2ax}{b}.$$



Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{AB} = \frac{b - x}{b} \Rightarrow MQ = \frac{a(b - x)}{b}.$$

Xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a(b - x)}{2b}.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).QH = \frac{1}{2}\left[\frac{a(b+x)}{b} + \frac{2ax}{b}\right].\frac{\sqrt{3}a(b-x)}{2b}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.(b + 3x)(b - x).$$

Ta biến đổi:

$$S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\left[\frac{4b^2}{3} - \left(x\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \le \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\frac{4b^2}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $(S_{MNPQ})_{Max} = \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$$x\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD. M, N là 2 điểm trên AB, CD, α là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a. Tìm các giao tuyến của α với (SAB) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α.

c. Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Mặt phẳng α chuyển động luôn song song với BC và đồng thời đi qua trung điểm C_1 của cạnh SC.

a. Mặt phẳng α cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A_1, B_1, D_1. Thiết diện $A_1B_1C_1D_1$ là hình gì ?

b. Chứng minh α luôn chứa một đường thẳng cố định.

c. Xác định thiết diện mà α cắt hình chóp S.ABCD. Định M để thiết diện là hình bình hành.

d. Gọi M là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. Chứng minh rằng khi α thay đổi thì M chuyển động trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là một điểm di động trên SC, α là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a. Chứng minh α luôn chứa một đường thẳng cố định.

b. Tìm các giao điểm H và K của a với SB, SD. Chứng minh rằng $\dfrac{SB}{SH} + \dfrac{SD}{SK} + \dfrac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

c. Thiết diện của hình chóp với α có thể là hình thang được không?

Bài tập 4: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. M và P là 2 điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho AM = CP = x, $(0 < x < a)$. Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a. Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện. Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. M là điểm chuyển động trên cạnh SC và α là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng α luôn chứa một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên cạnh SC.

b. Mặt phẳng α cắt SB, SD theo thứ tự tại E và F. Hãy trình bày cách dựng điểm E và F.

c. Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh rằng ba điểm I, J, A thẳng hàng.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang. M là điểm bất kì trên cạnh AB và α là mặt phẳng qua M song song với AD và SB.

a. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

b. Chứng minh rằng α song song với SC.

Bài tập 7: Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c ($a > b > c$). Một mặt phẳng α song song với AB và CD, cắt tứ diện theo một thiết diện có chu vi p và diện tích s.

a. Định α để p lớn nhất, nhỏ nhất.

b. Định α để s lớn nhất. Tính diện tích ấy.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là trung điểm của SB. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng α trong 2 trường hợp sau:

a. α qua M và song song với SO và AD.

b. α qua O và song song với AM và SC.

Bài tập 9: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho AJ = 2JD. M là một điểm di động trong tam giác BCD sao cho mặt phẳng (MIJ) luôn song song với AB.

a. Tìm hợp điểm M.

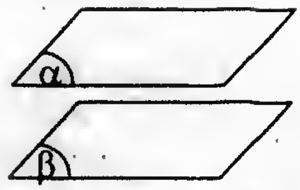
b. Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (MIJ).

CHỦ ĐỀ 3

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

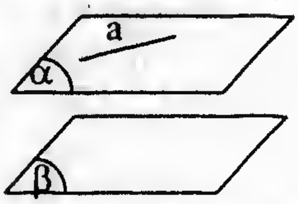
1. ĐỊNH NGHĨA



Hai mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2. CÁC TÍNH CHẤT

Định lí 1: *Nếu hai mặt phẳng α và β song song với nhau thì mọi đường thẳng a nằm trong α đều song song với β.*

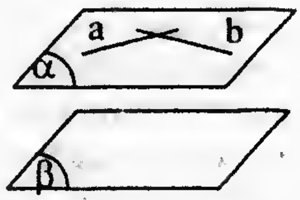


Tức là:

$$\begin{cases} a \in \alpha \\ \alpha // \beta \end{cases} \Rightarrow a // \beta.$$

Định lí 2: *Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với một mặt phẳng cho trước thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.*

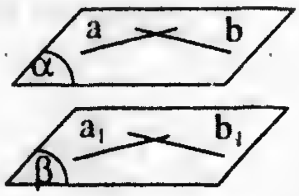
Tức là:



$$\begin{cases} a, b \in \alpha \\ a \text{ cắt } b \\ a // \beta \text{ và } b // \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$

Hệ quả 1: *Nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng của một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó song song với nhau.*

Tức là:



$$\begin{cases} a, b \in \alpha \\ a \text{ cắt } b \\ a // a_1 \subset \beta \text{ và } b // b_1 \subset \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$

Định lí 3: *Qua một điểm O bất kỳ nằm ngoài mặt phẳng α bao giờ cũng dựng được một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng α.*

Tức là:

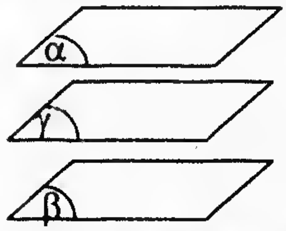
$$O \notin \alpha \Rightarrow \exists! \beta : \begin{cases} O \in \beta \\ \alpha // \beta \end{cases}.$$

Cách dựng:

- Trong α dựng a, b cắt nhau.
- Qua O dựng $a_1 // a$, $b_1 // b$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với α.

Hệ quả 2: *Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng α thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng β song song với mặt phẳng α.*

Hệ quả 3: *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*



Tức là:

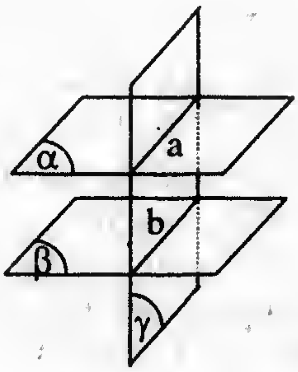
$$\begin{cases} \alpha // \gamma \\ \beta // \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha // \beta.$$

Hệ quả 4: *Nếu từ một điểm A nằm ngoài mặt phẳng α ta dựng một đường thẳng song song với α thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng qua A và song song với α..*

Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ A \in \beta \\ Ax // \alpha \end{cases} \Rightarrow Ax \subset \beta.$$

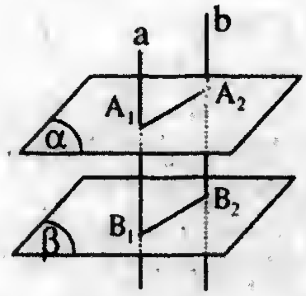
Định lí 4: *Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau.*



Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ a = \alpha \cap \gamma \\ b = \beta \cap \gamma \end{cases} \Rightarrow a // b.$$

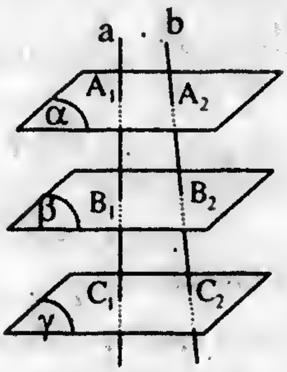
Định lí 5: *Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.*



Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \text{ và } a // b \\ a \cap \alpha = A_1 \text{ và } a \cap \beta = B_1 \\ b \cap \alpha = A_2 \text{ và } b \cap \beta = B_2 \end{cases} \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2.$$

Định lí 6: (Định lí Talét trong không gian) *Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.*



Tức là:

$$\begin{cases} \alpha // \beta // \gamma \\ a \cap \alpha = A_1 \text{ và } a \cap \beta = B_1 \text{ và } a \cap \gamma = C_1 \\ b \cap \alpha = A_2 \text{ và } b \cap \beta = B_2 \text{ và } b \cap \gamma = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh 2 mặt phẳng song song ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia (hoặc song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia).

Chú ý:

1. Sử dụng tính chất:

$$\begin{cases} \alpha \,//\, \beta \\ a \subset \beta \end{cases} \Rightarrow a \,//\, \alpha$$

ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng a song song với α.

2. Sử dụng định lí Ta – lét đảo ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, cụ thể:

Ba điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường thẳng a và ba điểm A_2, B_2, C_2 thuộc đường thẳng b (với a và b chéo nhau) thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng α, β, γ song song lần lượt chứa các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, từ đó ta được các kết quả:

A_1A_2 song song với β và γ.

B_1B_2 song song với α và γ.

C_1C_2 song song với α và β.

Điều quan trọng nhất cần chỉ ra được sự tồn tại của một trong ba mặt phẳng.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) và mặt phẳng (SBC) song song với nhau

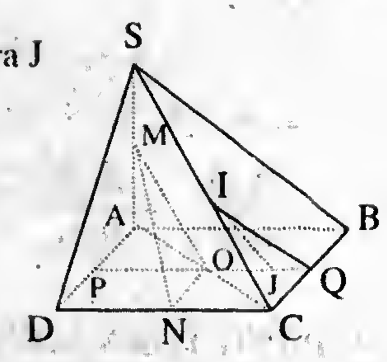
b. Gọi I là trung điểm SC, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB và CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

c. Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF song song với (SAD).

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} OM \,//\, SC \\ ON \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow (OMN) \,//\, (SBC).$$



b. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm AD và BC, suy ra J thuộc đường thẳng PQ.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} PQ \,//\, AB \\ IQ \,//\, SB \end{cases} \Rightarrow (IPQ) \,//\, (SAB) \Rightarrow IJ \,//\, (SAB).$$

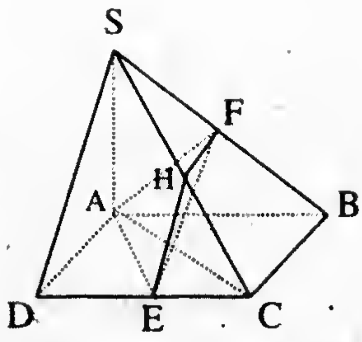
c. Sử dụng tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB}$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng song song lần lượt chứa các đoạn thẳng SD, EF, CD và ta thấy ngay một trong ba mặt phẳng đó chính là (SAD), do đó:

$EF \parallel (SAD)$.

Chú ý: Nếu các em học sinh cảm thấy khó hiểu trong lời giải của câu c) thì có thể sử dụng lời giải tường minh hơn như sau:



Dựng $EH \parallel SD$, $H \in SC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HS}{HC} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB} \Rightarrow HF \parallel BC \Rightarrow HF \parallel AD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

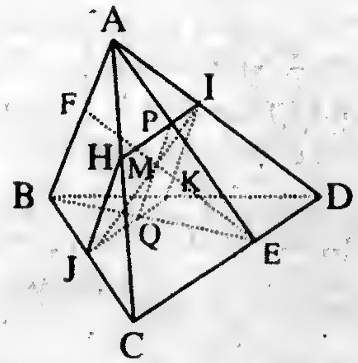
$(HEF) \parallel (SAD) \Rightarrow EF \parallel (SAD)$.

Ví dụ tiếp theo sẽ sử dụng lại cách trình bày này để giúp các em học sinh nắm vững hơn.

<u>Ví dụ 2:</u> Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a. Chứng minh rằng IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước (tức điểm M thoả $\overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{MJ}$).



Giải

a. Dựng $JH \parallel AB$, $H \in AC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{JB}{JC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow HI \parallel CD. \quad (2)$$

Gọi α là mặt phẳng chứa AB và song song với CD, suy ra α là mặt phẳng cố định và $(HIJ) \parallel \alpha$.

b. Giả sử (HIJ) cắt BD tại K, dễ thấy HIKJ là hình bình hành. Qua M kẻ PQ song song với AB ($P \in HI$ và $Q \in JK$). Ta có:

$AP \cap BQ = E$ và $EM \cap AB = F$.

Nhận xét rằng:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{PI}{PH} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow \text{E là điểm chia CD theo tỉ số k.}$$

$$\frac{FA}{FB} = \frac{MP}{MQ} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow \text{F là điểm chia AB theo tỉ số k.}$$

Vậy, tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k là đoạn EF với E, F lần lượt là điểm chia CD và AB theo tỉ số k.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a. Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBD).

b. Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh rằng PQ song song với (SBC).

Bài tập 2: Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong 2 mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a. Chứng minh rằng (CBE) song song với (ADF).
b. Chứng minh rằng (DEF) song song với (MNN'M').
c. Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N động.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh rằng các đường phân giác ngoài của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CAD}, \widehat{DAB}$ đồng phẳng.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với α lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Mặt phẳng β cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A_1, B_1, C_1, D_1.

a. Chứng minh rằng (AA_1, BB_1) song song với (CC_1, DD_1).
b. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành.
c. Chứng minh rằng $AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Bài tập 5: Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By, M và N là 2 điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho AM = BN. Vẽ $\vec{NP} = \vec{BA}$.

a. Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
b. Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài tập 6: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tìm tập hợp các điểm I trên đoạn thẳng MN và chia MN theo tỉ số k cho trước khi M, N di động lần lượt trên a, b.

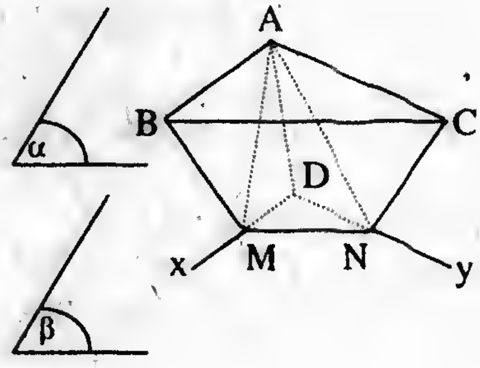
Bài toán 2:	Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Thiết diện song song với một mặt phẳng cho trước.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Ta sử dụng thêm định lí 4 để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.
2. Thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước được xác định thông qua việc tìm được các đoạn giao tuyến như trên.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hai mặt phẳng song song α và β. A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thuộc α và MN là đoạn thẳng nằm trong β.

a. Tìm giao tuyến của (MAB) và β; giao tuyến của (NAC) và β.
b. Tìm giao tuyến của (MAB) và (NAC).



Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ AB = \alpha \cap (MAB) \\ Mx = \beta \cap (MAB) \end{cases} \Rightarrow Mx // AB.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \alpha // \beta \\ AC = \alpha \cap (MAC) \\ Ny = \beta \cap (MAC) \end{cases} \Rightarrow Ny // AC.$$

b. Vì AB cắt AC tại A nên

$$Mx \cap Ny = D \Rightarrow (MAB) \cap (NAC) = AD.$$

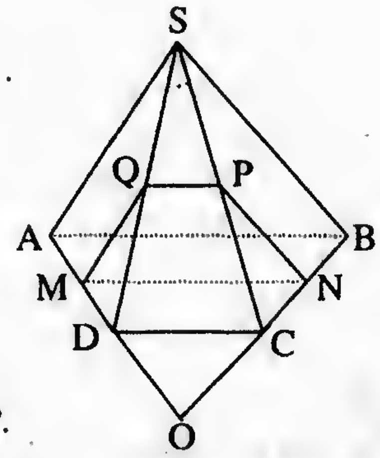
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA = 2a, α là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.
b. Đặt x = AM, với 0 < x < a. Định x để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.
c. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD.
d. Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ MN = \alpha \cap (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$$



Lập luận tương tự ta cũng có:

NP // BS, PQ // CD, QM // SA.

Nhận xét rằng:

MN // PQ bởi AB // CD.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SB} \stackrel{SA=SB}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn điều kiện là:

$$MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow MN + PQ = 2MQ. \qquad (1)$$

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x). \qquad (2)$$

Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x. \qquad (3)$$

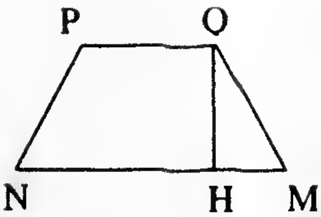
Giả sử AB cắt CD tại O và OD = y, ta có:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{3a} \Rightarrow 3y = a + y \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{OD + DM}{OD + DA} = \frac{\frac{a}{2} + a - x}{\frac{a}{2} + a} \Rightarrow MN = 3a - 2x. \qquad (4)$$

Thay (2), (3) và (4) vào (1), ta được:

$$3a - 2x + x = 4(a - x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$



Vậy, với $x = \frac{a}{3}$ thì MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn.

Khi đó, xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

suy ra bán kính đường tròn nội tiếp MNPQ là $r = \frac{1}{2}QH = \frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Câu c) và d) học sinh tự làm.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành tâm O có AC = a, BD = b. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng α di động song song với (SBD) và qua điểm I trên đoạn AC.

a. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α.

b. Tính diện tích thiết diện theo a, b và AI = x.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang có các cạnh đáy AB, CD với CD = p.AB ($0 < p < 1$). S_0 là diện tích tam giác SAB. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AD và song song với mặt phẳng (SAB). Đặt $\frac{DM}{AD} = x$, với $0 < x < 1$.

a. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo S_0, p, x.

b. Tính x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB.

a. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

b. Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$. Tính diện tích thiết diện biết diện tích tam giác BCD là s.

c. M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho G_1M luôn song song với mặt phẳng (ACD). Tìm tập hợp những điểm M.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD, một mặt phẳng α di động luôn luôn song song với (ABC), cắt SA, SB, SC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Tìm tập hợp điểm chung của 3 mặt phẳng (A'BC), (B'CA), (C'AB).

CHỦ ĐỀ 4

HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

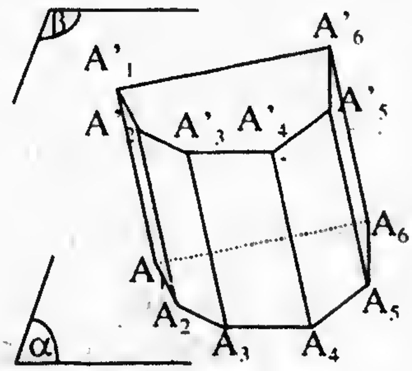
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÌNH LĂNG TRỤ

Định nghĩa*: Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.*

Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Tuỳ theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...



Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

b. Các mặt bên và các các mặt chéo là những hình bình hành.

c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

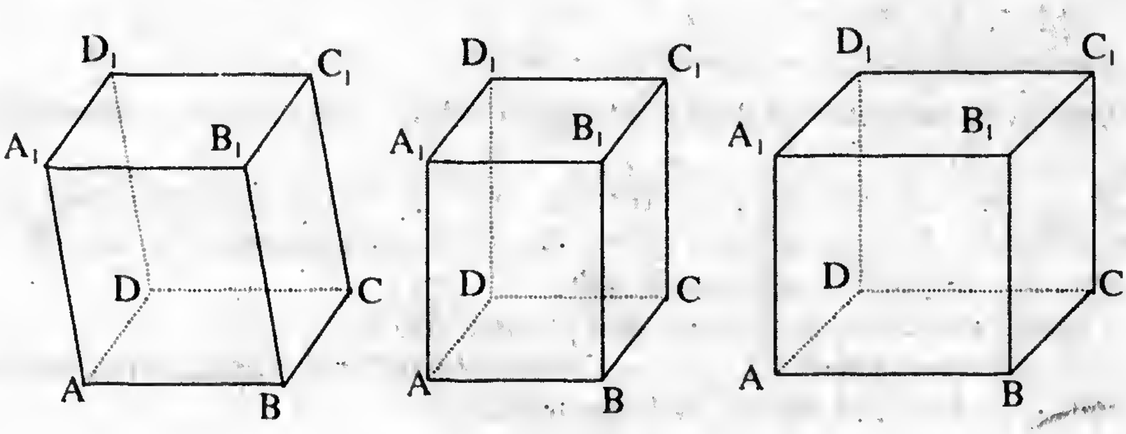
2. HÌNH HỘP

Định nghĩa*:*

a. *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.*

b. *Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.*

c. *Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*



Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1:	Sử dụng tính chất của hình lăng trụ - Thiết diện.

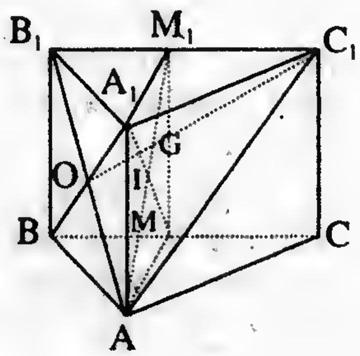
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình chóp. Lưu ý rằng " *Hai đáy hình lăng trụ song song, do đó giao tuyến của mặt phẳng cắt 2 mặt đó, nếu có, là hai đoạn thẳng song song* ".

Ví dụ 1: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng $AM // A_1M_1$.
b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB_1C_1) với đường thẳng A_1M.
c. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (BA_1C_1).
d. Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMA_1). Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔAB_1C_1.

Giải



a. Từ giả thiết, ta được:

$MM_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} AA_1$

$\Leftrightarrow AMM_1A_1$ là hình bình hành

$\Rightarrow AM // A_1M_1$.

b. Chọn mặt phẳng phụ (AMM_1A_1) chứa A_1M.

Nhận xét rằng:

$(AMM_1A_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap A_1M = I$

suy ra $A_1M \cap (AB_1C_1) = I$.

c. Gọi $O = AB_1 \cap A_1B$, khi đó ta nhận được:

$(AB_1C_1) \cap (BA_1C_1) = OC_1$, chính là đường thẳng d cần tìm.

d. Chọn mặt phẳng phụ (AB_1C_1) chứa d (chứa OC_1).

Nhận xét rằng:

$(AMA_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap OC_1 = G$

suy ra $d \cap (AMA_1) = G$.

Dễ thấy G là trọng tâm ΔAB_1C_1, bởi trong ΔAB_1C_1 thì G là giao điểm của hai đường trung tuyến.

Ví dụ 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB_1A_1, ACC_1A_1 là hình vuông. Gọi I, J là tâm các mặt bên nói trên và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC).
b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO). Chứng minh thiết diện là thang cân. Tính diện tích của nó theo a.

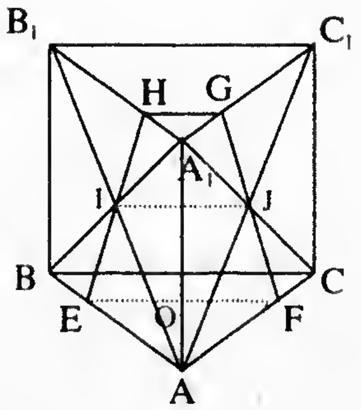
Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{IA_1}{IB} = \frac{JA_1}{JC} = 1$$

$\Rightarrow IJ // BC \subset (ABC) \Rightarrow IJ // (ABC)$.

b. Ta lần lượt có:



$$\begin{cases} IJ \in (IJO) \text{ và } BC \in (ABC) \\ IJ \,//\, BC \\ (IJO) \cap (ABC) = Ox \end{cases}$$

$$\Rightarrow Ox \,//\, IJ \,//\, BC.$$

và Ox cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Nối EI cắt A_1B_1 tại H và nối FI cắt A_1C_1 tại G. Như vậy, thiết diện là tứ giác EFGH.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ABC) // (A_1B_1C_1) \\ (IJO) \cap (ABC) = EF \\ (IJO) \cap (A_1B_1C_1) = GH \end{cases} \Rightarrow EF \,//\, GH \Rightarrow EFGH \text{ là hình thang.}$$

Vì ΔABC nên $AA_1B_1B = AA_1C_1C$, do đó EH = FG.

Vậy, thiết diện EFGH là hình thang cân.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}.$$

- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$\frac{HG}{B_1C_1} = \frac{A_1H}{A_1B_1} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG = \frac{a}{3}.$$

- Trong ΔIBE, ta có:

$$IE^2 = BI^2 + BE^2 - 2BI.BE.\cos\widehat{IBE}$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3}.\cos 45^0 = \frac{5a^2}{18}$$

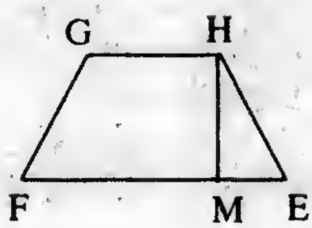
$$\Rightarrow IE = \frac{a\sqrt{10}}{6} \Rightarrow EH = 2IE = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Khi đó, xét hình thang cân EFGH, hạ đường cao HM, ta có:

$$HM = \sqrt{EH^2 - ME^2} = \sqrt{EH^2 - \left(\frac{EF - HG}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + HG).HM$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$



Chú ý: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a), chúng ta có thể sử dụng nhận xét:

IJ là đường trung bình của $\Delta A_1BC \Leftrightarrow IJ \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC$ (ta có $IJ = \frac{a}{2}$).

2. Khi đó, trong câu b), chúng ta có thể tính độ dài HG dựa trên tính chất IJ là đường trung bình của hình thang EFGH như sau:

$$IJ = \frac{1}{2}(EF + HG) \Rightarrow HG = 2IJ - EF = 2.\frac{a}{2} - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho lăng trụ tam giác ABC. $A_1B_1C_1$.

a. Tìm giao tuyến của (AB_1C_1) và (BA_1C_1).

b. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm bất kì trên AA_1 và BC. Tìm giao điểm của B_1C_1 với mặt phẳng (AA_1N) và giao điểm của MN với mặt phẳng (AB_1C_1).

Bài tập 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M là trung điểm của trung tuyến AI của đáy ABC. α là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AC_1 và B_1C. Xác định thiết diện của lăng trụ đã cho với α và tìm tỉ số mà thiết diện chia cạnh CC_1.

Bài tập 3: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$.

a. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC_1), (BCA_1) và (CAB_1) có một điểm chung O ở trên đoạn GG_1.

b. Tính tỉ số $\dfrac{OG}{OG_1}$.

Bài tập 4: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$.

a. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, ACC_1. Chứng minh rằng $(IGK) // (BB_1C_1C)$ và $(A_1KG) // (AIB_1)$.

b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB_1 và CC_1. Hãy dựng đường thẳng qua trọng tâm tam giác ABC cắt AB_1 và MN.

Bài tập 5: Cho lăng trụ tam giác ABC. $A_1B_1C_1$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC_1. P là điểm đối xứng của C qua A.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A_1MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA_1 và AB.

Bài tập 6: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi H là trung điểm của A_1B_1.

a. Chứng minh CB_1 song song với mặt phẳng (AHC_1).

b. Tìm giao điểm của AC_1 với (BCH).

c. Mặt phẳng α qua trung điểm của CC_1 và song song với AH và CB_1. Xác định thiết diện và tỉ số mà các đỉnh của thiết diện chia cạnh tương ứng của lăng trụ.

Bài toán 2: Sử dụng tính chất của hình hộp - Thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình lăng trụ.

__Ví dụ 1:__ Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$.

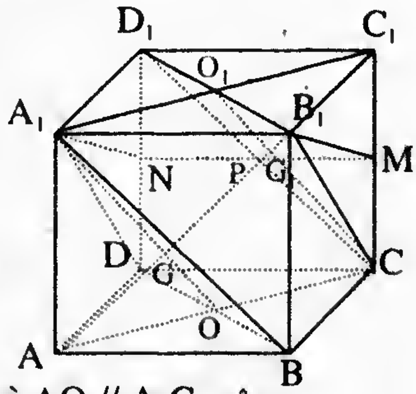
a. Chứng minh rằng $(BDA_1) // (B_1D_1C)$.

b. Chứng minh đường chéo AC_1 đi qua các trọng tâm G, G_1 của ΔA_1BD và ΔCB_1D_1 và G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A_1B_1G_1)$ với hình hộp đã cho. Thiết diện là hình gì ?

d. Gọi O, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và BCC_1B_1. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (A_1OK) với hình hộp đã cho.

Giải



a. Gọi O, O_1 theo thứ tự là tâm của các hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$, ta có:

$$\begin{cases} A_1O // CO_1 \\ BD // B_1D_1 \end{cases} \Rightarrow (BDA_1) // (B_1D_1C).$$

b. Vì AC_1, AO, CO_1 cùng nằm trong mặt phẳng (ACC_1A_1) nên gọi:

$$G = AC_1 \cap A_1O \text{ và } G_1 = AC_1 \cap CO_1.$$

- Trong ΔA_1BD, điểm G thuộc trung tuyến A_1O và vì AO // A_1C_1 nên:

$$\frac{GO}{GA_1} = \frac{AO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$$

do đó, G là trọng tâm ΔA_1BD.

- Chứng minh tương tự G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Nhận xét rằng OG, O_1G_1 theo thứ tự là đường trung bình của ΔACG_1 và ΔA_1C_1G nên:

$$AG = GG_1 = G_1C_1$$

tức là G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Kéo dài B_1G_1 cắt CD_1 tại P, ta có P là trung điểm của CD_1 vì G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

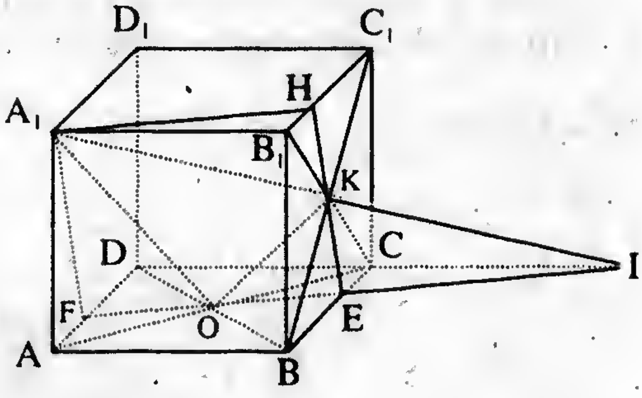
Ta có:

$$\begin{cases} A_1B_1 \in (A_1B_1G_1) \text{ và } C_1D_1 \in (CDD_1C_1) \\ A_1B_1 // C_1D_1 \\ (A_1B_1G_1) \cap (CDD_1C_1) = Px \end{cases} \Rightarrow Px // A_1B_1 // C_1D_1$$

giả sử Px theo thứ tự cắt CC_1 và DD_1 tại M và N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện A_1B_1MN là hình bình hành.

d. Ta lần lượt có:



- Trong (A_1B_1CD) giả sử:

$$A_1K \cap DC = I.$$

- Nối IO cắt BC và AD theo thứ tự tại E và F.
- Nối KE cắt B_1C_1 tại H.

Nối A_1F và A_1H nhận được thiết diện A_1FEH là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B_1C_1 và DD_1.

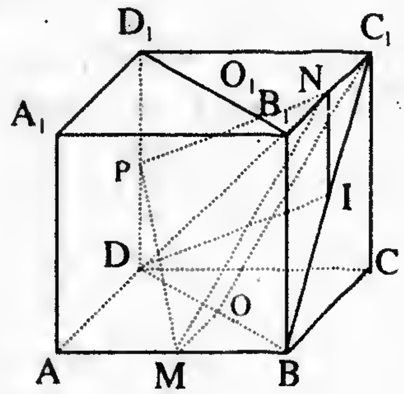
a. Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của nó.

Giải

a. Gọi O, O_1, I theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ và BCC_1B_1.

Nhận xét rằng:



$$MO \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1D_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}B_1C_1 \overset{//}{=} NC_1$$

$\Leftrightarrow MOC_1N$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN // OC_1$. (1)

$$NI \overset{//}{=} \frac{1}{2}BB_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}AA_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}DD_1 \overset{//}{=} PD$$

$\Leftrightarrow$ NIDP là hình bình hành

$\Rightarrow PN // DI$. (2)

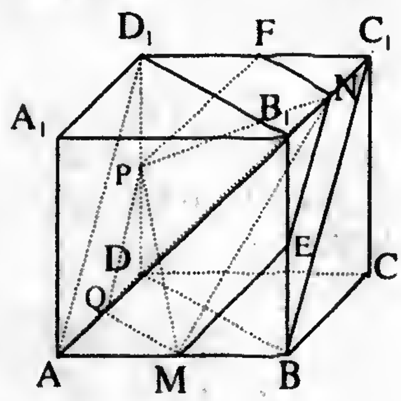
Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) // (BDC_1)$.

Mặt khác:

$$\begin{cases} AO_1 // C_1O \\ B_1D_1 // BD \end{cases} \Rightarrow (AB_1D_1) // (BDC_1).$$

Vậy, (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Từ kết quả câu a), ta nhận xét:



$$\begin{cases} (AB_1D_1)//(MNP) \\ (AB_1D_1) \cap (A_1B_1C_1D_1) = B_1D_1 \\ (MNP) \cap (A_1B_1C_1D_1) = Nx \end{cases}$$

suy ra Nx song song với B_1D_1 và cắt C_1D_1 tại F là trung điểm của C_1D_1.

$$\begin{cases} (C_1BD)//(MNP) \\ (C_1BD) \cap (ABCD) = BD \\ (MNP) \cap (ABCD) = My \end{cases}$$

suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A_1B_1 tai G, nối GM cắt BB_1 tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác MENFPQ.

Dựa theo tính chất đường trung bình ta thấy ngay MENFPQ là lục giác đều có độ dài cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó:

$$S_{MENFPQ} = 6.\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi α là mặt phẳng qua tâm O của mặt ABCD và song song với B_1D và BC_1.

a. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng α.

b. Tính diện tích thiết diện theo a.

Bài tập 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Trên AB, CC_1, C_1D_1 và AA_1 lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C_1N = C_1P = AQ = x$, với $0 \le x \le a$.

a. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b. Chứng minh mặt phẳng (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định. Định x để (MNPQ) // $(A_1B_1C_1)$.

c. Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Thiết diện có đặc điểm gì về cạnh ? Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Bài tập 3: Chứng minh rằng trong hình hộp, tổng các bình phương của bốn đường chéo bằng tổng các bình phương tất cả các cạnh.

Bài tập 4: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A.

a. Chứng minh rằng sau điểm M, N, P, Q, R, S đồng phẳng.

b. Chứng minh rằng lục giác MNPQRS có tâm đối xứng là giao điểm các đường chéo của hình hộp.

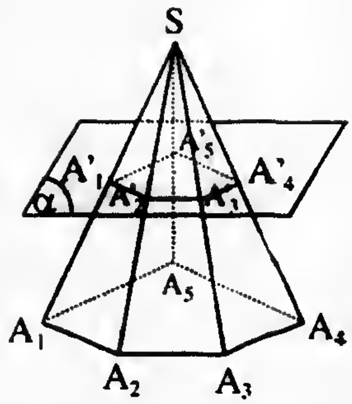
CHỦ ĐỀ 5

HÌNH CHÓP CỤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng α song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n theo thứ tự tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một *hình chóp cụt.*



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...$A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

2. TÍNH CHẤT

Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Cách cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

Chứng minh

1. Vì α // $(A_1A_2...A_n)$ nên (theo định lí " *Nếu hai mặt phẳng song song bị cắt bởi một mặt phẳng thứ ba thì hai giao tuyến song song với nhau*"):

A_1A_2 // $A'_1A'_2$,

A_2A_3 // $A'_2A'_3$,

...

$A_{n-1}A_n$ // $A'_{n-1}A'_n$,

nên hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ đồng dạng với nhau.

2. Lập luận như 1) ta thấy ngay các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm theo định nghĩa.

II. VÍ DỤ MINH HOẠ

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp cụt $ABC.A_1B_1C_1$ trong đó ABC là đáy lớn. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, BC, CA và M_1, N_1, P_1 theo thứ tự là trung điểm A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

a. Chứng minh rằng các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy.

b. Chứng minh rằng MN // M_1N_1, NP // N_1P_1, PM // P_1M_1.

Giải

a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, ta có:

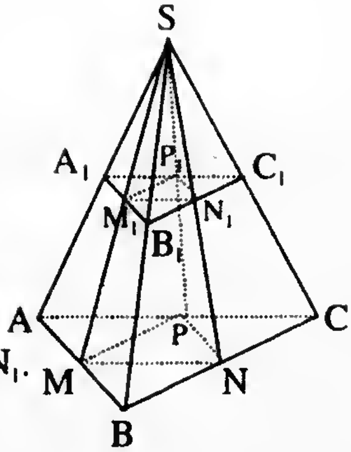
$AB \parallel A_1B_1$

M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, A_1B_1

suy ra $S \in MM_1$.

Tương tự, ta cũng có $S \in NN_1$ và $S \in PP_1$.

Vậy, các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại S.



b. Theo tính chất đường trung bình, ta có:

$MN \parallel AC$

$M_1N_1 \parallel A_1C_1$

ngoài ra, theo tính chất hình chóp cụt $AC \parallel A_1C_1$ nên $MN \parallel M_1N_1$.

Tương tự, ta cũng có $NP \parallel N_1P_1$, $PM \parallel P_1M_1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp cụt $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ trong đó ABCD là đáy lớn có diện tích bằng s_1 và $A_1B_1C_1D_1$ là đáy nhỏ có diện tích bằng s_2.

a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$

b. Gọi M là trung điểm AA_1, mặt phẳng α qua M và song song với mặt phẳng đáy (ABCD). Xác định thiết diện của hình chóp cụt với mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo s_1 và s_2.

Bài tập 2: Cho hình chóp cụt $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ trong đó đáy lớn ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng AD_1 và BC_1, CB_1 và DA_1, BA_1 và CD_1, AB_1 và DC_1. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

CHỦ ĐỀ 6

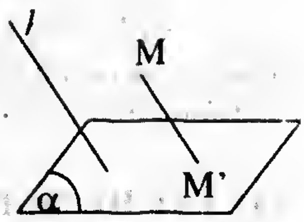
PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng α và một đường thẳng *l* không song song với α.

Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với *l* sẽ cắt α tại điểm M'. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng α theo phương *l*.



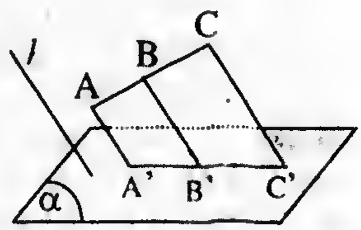
Mặt phẳng α gọi là *mặt phẳng chiếu.*

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên α được gọi là *phép chiếu song song lên mặt phẳng α theo phương l.*

Chú ý: Nếu a // *l* thì hình chiếu của a lên α là một điểm trên α (chính là giao điểm của a với α), do vậy các tính chất trong phần sau chỉ xét những đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song với *l*.

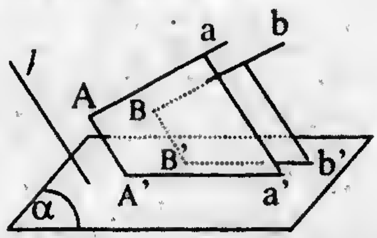
2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

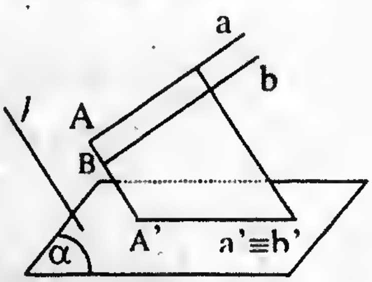
Định lí 1: *Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*



Hệ quả: *Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.*

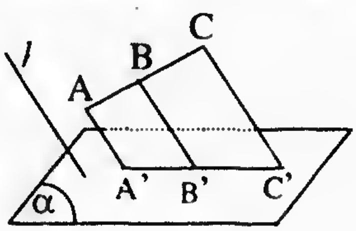
Định lí 2: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*





Hệ quả: *Hình chiếu song song của một hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu là một hình bình hành.*

Định lí 3: *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*



Tức là:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.*

3.1. Định nghĩa

Định nghĩa: *Hình biểu diễn của một hình* H *trong không gian là hình chiếu song song của* H *lên một mặt phẳng nào đó* theo một phương chiếu nào đó.

3.2. Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn

1. *Hình biểu diễn phải đúng*: Để vẽ đúng chúng ta cần quan tâm tới các yếu tố được bảo toàn sau:
   a. Sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên một đường thẳng.
   b. Sự song song của các đường thẳng, các tia hoặc các đoạn thẳng.
   c. Tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng phương.
   Như vậy, *các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều được giữa nguyên trên hình biểu diễn.*
2. *Hình biểu diễn phải nổi*: Giúp chúng ta dễ tưởng tượng.

Chúng ta có:

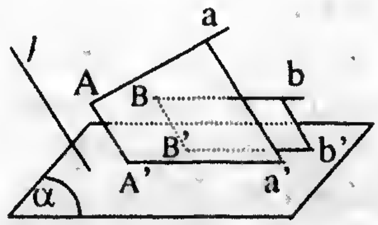
- ***Tam giác***: Một ΔABC có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác bất kì (đều, cân, vuông).
- ***Hình bình hành***: Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của các loại hình bình hành như hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi và hình bình hành bất kì.
- ***Đường tròn***: Để biểu diễn đường tròn chúng ta sử dụng một hình Elíp.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

__Ví dụ 1:__ Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không ?

Giải

Từ hình vẽ, ta thấy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau a và b theo phương chiếu l trên mặt phẳng α có thể song song với nhau. Trường hợp này xảy ra khi " *Mặt phẳng β song song với a và b sẽ chứa l hoặc song song với l* ".

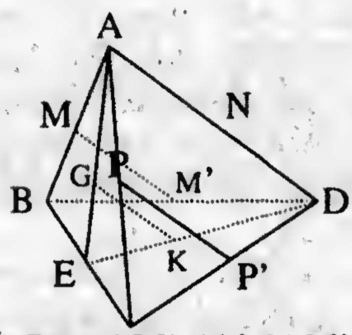


__Ví dụ 2:__ Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh hình chiếu song song K của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm ΔBCD.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N, P trong phép chiếu song song ở câu a).

Giải



a. Từ giả thiết, ta được:

GK // AD,

AG ∩ DK = E là trung điểm BC,

suy ra:

$$\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{K là trọng tâm } \Delta BCD.$$

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Trong (ABD) dựng Mx song song với AD và cắt BD tại M', khi đó M' chính là hình chiếu song song của điểm M trong phép chiếu song song ở câu a).

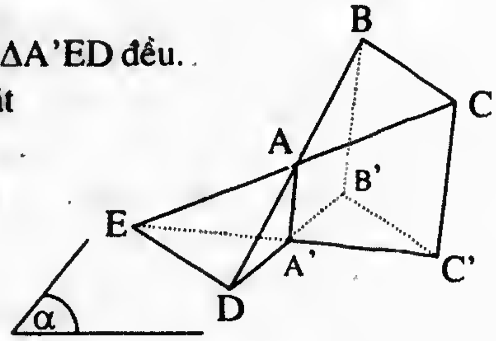
- Vì N thuộc AD nên D chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).
- Trong (ACD) dựng Ny song song với AD và cắt CD tại N', khi đó N' chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).

__Ví dụ 3:__ Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài mặt phẳng α. Giả sử BC song song với α, còn AB và AC cắt α lần lượt tại D và E. Hãy chọn phương chiếu l sao cho hình chiếu của tam giác ABC trên α theo phương l là một tam giác đều.

Giải

Thực hiện cách dựng:

- Trong mặt phẳng α, dựng điểm A' sao cho ΔA'ED đều.
- Dựng hình chiếu B', C' của B và C trên mặt phẳng α theo phương chiếu AA'.



Ta đi chứng minh ΔA'B'C' là tam giác đều.

Thật vậy, ta có ngay:

E, A', C' thẳng hàng

D, A', B' thẳng hàng

ED // B'C'

suy ra ΔA'DE và ΔA'B'C' đồng dạng, tức là ΔA'B'C' là tam giác đều.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau hay không ?

Bài tập 2: Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng α. Gọi A' và B' theo thứ tự là hình chiếu song song của hai điểm A và B trên mặt phẳng α theo phương của đường thẳng l cho trước. Chứng minh rằng " *Nếu* AB *song song với* α *thì* AB = A'B' ". Đảo lại có đúng không ?

Bài tập 3: Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng α, giả sử đường thẳng AB cắt α tại O. Gọi A' và B' theo thứ tự là hình chiếu song song của hai điểm A và B trên mặt phẳng α theo phương của đường thẳng l cho trước nào đó.

a. Chứng minh rằng ba điểm O, A', B' thẳng hàng.

b. Hãy chọn phương l sao cho:

AB = A'B'   AB = 2A'B'.

Bài tập 4: Chứng minh rằng trọng tâm G của ΔABC có hình chiếu song song là trọng tâm G' của ΔA'B'C', trong đó ΔA'B'C' là hình chiếu song song của ΔABC.

Bài tập 5: Trong mặt phẳng α cho ΔABC bất kì. Chứng minh rằng có thể xem:

a. ABC là hình chiếu song song của một tam giác cân nào đó.

b. ABC là hình chiếu song song của một tam giác đều nào đó.

c. ABC là hình chiếu song song của một tam giác vuông nào đó.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng α cho hình bình hành ABCD bất kì. Chứng minh rằng có thể xem:

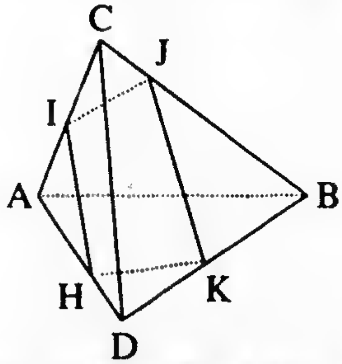
a. ABCD là hình chiếu song song của một hình chữ nhật nào đó.

b. ABCD là hình chiếu song song của một hình thoi nào đó.

c. ABCD là hình chiếu song song của một hình vuông nào đó.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài tập 1: Khi giải một bài toán, một học sinh đã vẽ tứ diện, trong đó đã dựng một thiết diện (hình dưới). Hình vẽ có đúng không ?



Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng α cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình bình hành là α song song với (ABCD).

Bài tập 3: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi I, J là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng α qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MN, PQ, BC đồng qui hoặc song song.

b. Đặt AM = x, AN = y. Chứng minh rằng $a(x + y) = 3xy$.

c. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a, x và y.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. SA = SB = SC = SD = a. Gọi M là một điểm trên đoạn AO; α là mặt phẳng qua M và song song với AD và SO. Đặt $\frac{AM}{AO} = k$, với $0 < k < 1$.

a. Chứng minh thiết diện của hình chóp đã cho cắt bởi α là hình thang cân.

b. Tính các cạnh của thiết diện theo a và k.

c. Tìm k để thiết diện trên ngoại tiếp được một đường tròn. Trong trường hợp này hãy tính diện tích thiết diện theo a.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABC, O là một điểm bên trong tam giác ABC. Qua O vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự tại A', B', C'.

a. Chỉ cách dựng các điểm A', B', C'.

b. Chứng minh rằng tổng $\frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ có giá trị không đổi khi O di động trong tam giác ABC.

c. Định O để OA'.OB'.OC' có giá trị lớn nhất.

Bài tập 6: Cho hình hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang với AD // BC. M là một điểm di động bên trong tứ giác ABCD. Qua M vẽ những đường thẳng lần lượt song song với SA, SB cắt các mặt phẳng (SBC) và (SAD) theo thứ tự tại N và P.

a. Nêu cách dựng các điểm N, P.

b. Chứng minh $\frac{MN}{SA} + \frac{MP}{SB}$ không đổi.

c. Tìm tập hợp điểm M sao cho diện tích tam giác MNP có giá trị lớn nhất.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD. Tứ giác đáy có AB và CD cắt nhau tại E, AD và BC cắt nhau tại F, AC và BC cắt nhau tại G. α là mặt phẳng cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'.

a. Tìm giao điểm D' của SD với α.

b. Tìm điều kiện của α để A'B'// C'D'.

c. Với điều kiện nào của α thì A'B'C'D' là hình hành? Chứng minh rằng khi đó $\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}=\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}$.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. M và P là 2 điểm lần lượt di động trên AD và SC sao cho $\frac{MA}{MD}=\frac{PS}{PC}=x>0$.

a. Chứng minh rằng MP luôn luôn song song với một mặt phẳng α cố định.

b. Tìm giao điểm I của mặt phẳng (SBD) với MP.

c. Mặt phẳng qua M và song song với α cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện và cắt BD tại J. Chứng minh IJ có phương không đổi.

d. Định x để diện tích thiết diện bằng k lần diện tích ΔSAB, với k dương cho trước.

Bài tập 9: Cho lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn AB', AC' và B'C sao cho $\frac{AM}{AB'}=\frac{C'N}{AC'}=\frac{CP}{CB'}=x$.

a. Định x để (MNP) // (A'BC'). Khi đó hãy tính diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (MNP), biết tam giác A'BC' là tam giác đều cạnh a.

b. Tìm tập hợp trung điểm của NP khi x thay đổi.

Bài tập 10: Cho mặt phẳng α và 2 đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt α tại A, B. (Δ) là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với α, cắt d_1 tại M, d_2 tại N. Đường thẳng qua N và song song với d_1 cắt α tại N'.

a. Tứ giác AMNN' là hình gì ? tìm tập hợp điểm N'.

b. Xác định vị trí của (Δ) để MN có độ dài nhỏ nhất.

c. Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng cố định khi M di động.

d. ΔBMN vuông cân tại B và BM = a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp B.AMNN' với mặt phẳng qua O và song song mặt phẳng (BMN).

CHƯƠNG III

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

CHỦ ĐỀ 1

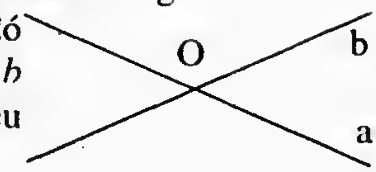
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CẮT NHAU

Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O. Chúng tạo thành bốn góc

Định nghĩa: Số đo của góc nhỏ nhất trong bốn góc đó được gọi là *số đo của góc hợp bởi hai đường thẳng a, b* hay đơn giản là *góc giữa hai đường thẳng a và b*, kí hiệu là $(\widehat{a,b})$ hay $(\widehat{b,a})$.



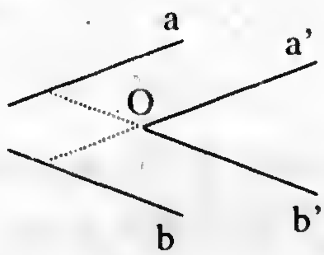
Đặc biệt:

- Khi a và b trùng nhau thì $(\widehat{a,b}) = 0^0$.
- Khi a và b vuông góc thì $(\widehat{a,b}) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (\widehat{a,b}) \le 90^0$.

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN

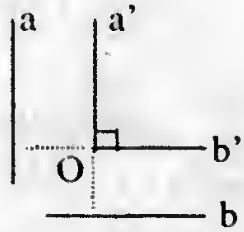
Định nghĩa: *Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng cắt nhau a', b' lần lượt song song với a và b*, kí hiệu là $(\widehat{a,b})$ hay $(\widehat{b,a})$.



Chú ý: Để xác định $(\widehat{a,b})$ ta có thể lấy điểm O nằm ngay trên một trong hai đường thẳng đó.

3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.*



Như vậy:

$$a \perp b \Leftrightarrow (\widehat{a,b}) = 90^0.$$

4. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Định lí: *Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai.*

Tức là:

$$\begin{cases} a \,//\, b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

Chú ý:

1. Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc thì hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.

2. Trong mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau, nhưng trong không gian thì không còn đúng.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Tìm góc* bằng việc lấy một điểm O nào đó (thông thường $O \in a$ hoặc $O \in b$). Qua O dựng a' và b' theo thứ tự song song với a và b.
Khi đó, góc nhọn hoặc vuông tạo bởi a' và b' là góc giữa a và b.

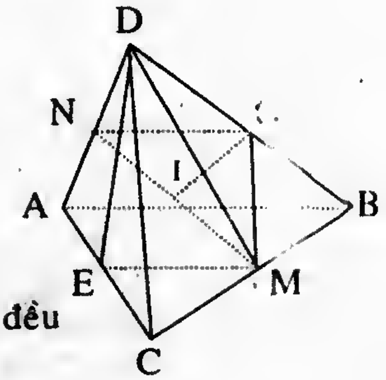
Bước 2: *Tính góc*: Sử dụng tỷ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí hàm số côsin trong tam giác thường để xác định số đo góc giữa a' và b'.

__Ví dụ 1:__ Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{3}$.

Giải



a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có:

$$EM \,//\, AB \text{ và } EM = \frac{a}{2}.$$

do đó $(\widehat{AB,DM}) = (\widehat{MD,ME})$.

Xét ΔDEM, ta có:

$$DM = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ trung tuyến trong tam giác đều}$$

$$\cos DME = \frac{DM^2 + EM^2 - DE^2}{2DM.EM} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

b. Gọi O là trung điểm của BD, ta có:

ON // AB và ON = a.

OM // CD và OM = a

do đó (AB, CD) = (OM, ON).

Gọi I là trung điểm MN, trong ΔIME vuông tại I, ta có:

$$\sin\widehat{MOI} = \frac{IM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MOI} = 60^0$$

$$\Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 120^0 \Rightarrow (\widehat{OM,ON}) = 180^0 - 120^0 = 60^0.$$

Vậy $(\widehat{AB,CD}) = 60^0$.

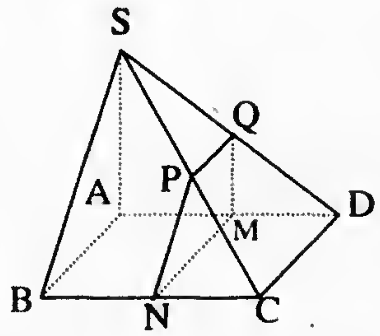
Ví dụ 2: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, SAB là tam giác vuông cân tại A, M là điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng α qua M song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông.

b. Đặt AM = x. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

Giải

a. Ta có:



$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (SAD) = MQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow MQ // SA. \quad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ \alpha \cap (ABCD) = MN \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow MN // AB. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NMQ} = 90^0$.

Mặt khác, ba mặt phẳng (ABCD), (SCD) và α cắt nhau theo ba giao tuyến MN, CD, PQ có:

MN // CD $\Rightarrow$ MN // PQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông.

b. Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ. \quad (3)$$

Ta có ngay MN = AB = a. (4)

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{AD - AM}{DA} = \frac{2a - x}{2a} \Rightarrow MQ = \frac{2a - x}{2}. \quad (5)$$

Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{2a} \Rightarrow PQ = \frac{x}{2}. \quad (6)$$

Thay (4), (5), (6) vào (3), ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{2})\frac{2a - x}{2} = \frac{1}{8}(4a^2 - x^2).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và MN = $a\sqrt{2}$.

Bài tập 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b và $AA_1 = c$.

a. Hãy tính góc giữa AD_1 và B_1C.

b. Hãy tính góc giữa AB và A_1C.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Đoạn IJ nối trung điểm I của AB là trung điểm J của CD. Giả sử AB vuông góc với CD. α là mặt phẳng qua M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a. Tìm giao tuyến của α với mặt phẳng (ICD).

b. Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng α. Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.
c. Tính diện tích thiết diện, biết IJ = 3IM.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng α cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{B} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài α, sao cho SB = a và SB vuông góc với OA. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng β qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM, với $0 < x < a$.
a. Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.
b. Tính theo a và x diện tích của hình thang này.
c. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Bài toán 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

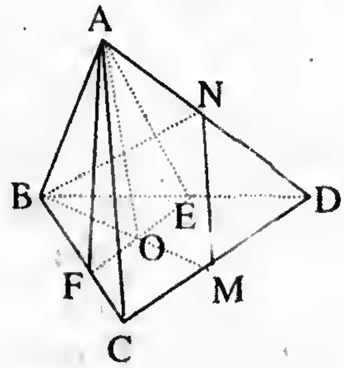
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh a vuông góc với b, ta lựa chọn theo hướng:

Hướng 1: Chứng minh $(\widehat{a,b}) = 90^0$.

Hướng 2: Sử dụng kết quả về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của hai đường thẳng.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoài tiếp ΔBCD.
a. Chứng minh rằng AO vuông góc với CD.
b. Gọi M là trung điểm CD. Tính góc giữa AC và BM.



Giải

a. Qua O dựng đường thẳng song song với CD, cắt BC, BD theo thứ tự tại E và F, suy ra:

$$(\widehat{AO,CD}) = \widehat{AOF}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} EF // CD \\ BC = BD \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BF \\ OE = OF \end{cases}.$$

Xét hai tam giác ΔABE và ΔABF, ta có:

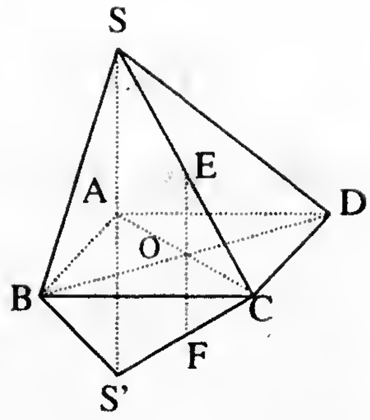
$$\begin{cases} BE = BF \\ AB\ \text{chung} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF \Rightarrow AE = AF$$

$$\Leftrightarrow \Delta AEF \text{ cân tại A} \Rightarrow AO \perp EF \Leftrightarrow \widehat{AOF} = 90^0 \Leftrightarrow AO \perp CD.$$

b. *Học sinh tự làm* – Đáp số $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.
a. Chứng minh rằng SA vuông góc với BC và CD.
b. Chứng minh rằng SA vuông góc với AC và BD.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BC // AD \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA.$$

$$\begin{cases} CD // AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SA.$$

b. Trên tia SA lấy điểm S' sao cho AS = AS', ta có:

AB, AD đều là trung trực của SS'

$\Rightarrow BS = BS'$ và $DS = DS' \Rightarrow \Delta SBD = \Delta S'BD$ (c.c.c)

$\Rightarrow OS = OS' \Rightarrow \Delta OSS'$ cân tại O $\Rightarrow OA \perp SS' \Leftrightarrow AC \perp SA$.

Trong (CSS') kẻ Ox song song với SS' và cắt SC, S'C theo thứ tự tại E, F và là trung điểm của mỗi đường, ta có ngay:

EF // SA.

Mặt khác, vì:

$\Delta SBC = \Delta S'BC$ (c.c.c) $\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B

$\Rightarrow OB \perp EF \Leftrightarrow BD \perp SA$.

Chú ý: Đề nghị các em học sinh đề xuất một cách giải khác để chứng minh SA vuông góc với BD.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = AD = BC = b.

a. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b. Tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện.

Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

a. Chứng minh rằng AC vuông góc với B_1D_1.

b. Chứng minh rằng AB_1 vuông góc với CD_1.

c. Chứng minh rằng AD_1 vuông góc với CB_1.

Bài tập 3: Cho hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của tứ diện vuông góc với nhau.

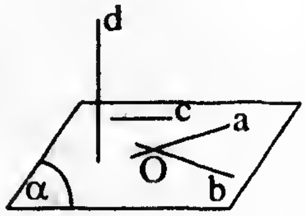
Bài tập 4: Chứng minh rằng nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng α thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong α.

CHỦ ĐỀ 2
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. ĐỊNH LÍ MỞ ĐẦU

Nếu đường thẳng d *vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau* a *và* b *nằm trong mặt phẳng* α *thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong* α.



Như vậy:

$$\begin{cases} a\ \text{c¾t}\ b \\ d \perp a\ \text{vµ}\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow \forall c \subset \alpha \text{ luôn có } d \perp c.$$

2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

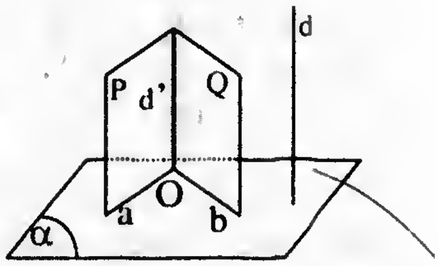
Định nghĩa: *Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.*

Khi đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng α, ta kí hiệu là $a \perp \alpha$ hay $\alpha \perp a$.

Định lí 1: *Từ một điểm O cho trước, ta dựng được một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng d cho trước.*

Cách dựng:

- Qua O dựng đường thẳng d' // d.
- Lấy hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng đi qua d'. Trong (P) dựng đường thẳng a qua O và vuông góc với d'. Trong (Q) dựng đường thẳng b qua O và vuông góc với d'



Khi đó (a, b) chính là mặt phẳng cần dựng.

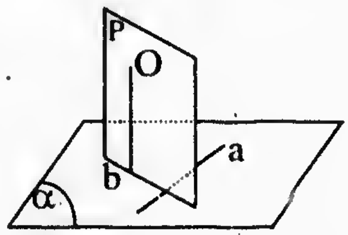
Hệ quả 1: *Cho trước điểm O và đường thẳng a. Nếu qua O ta dựng đường thẳng b vuông góc với a thì b chứa trong mặt phẳng qua O vuông góc với a.*

Hệ quả 2: *Cho hai đường thẳng vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.*

Định lí 2: *Từ một điểm O cho trước ta dựng được một và và chỉ một đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng α cho trước.*

Cách dựng:

- Lấy đường thẳng a nằm trong α.
- Dựng mặt phẳng (P) qua O vuông góc với a cắt α theo giao tuyến b.
- Trong (P) dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với b

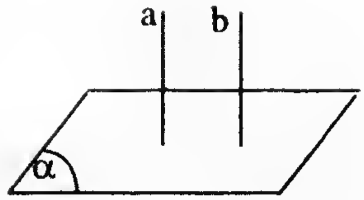


Khi đó d chính là đường thẳng cần dựng.

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Chúng ta có các mối liên hệ sau:

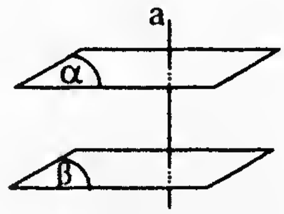
1. *Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.*



Tức là:

$$\begin{cases} a \,//\, b \\ a \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow b \perp \alpha.$$

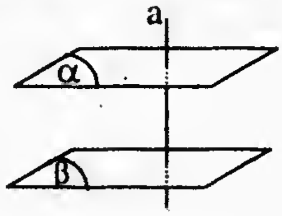
2. *Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Tức là:

$$\begin{cases} \alpha \,//\, \beta \\ a \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta.$$

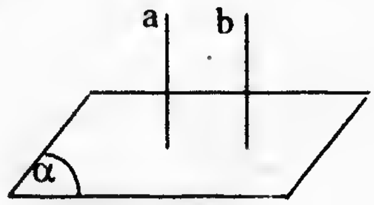
3. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*



Tức là:

$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta.$$

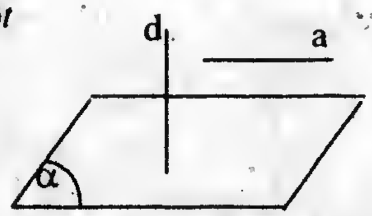
4. *Cho hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc một mặt phẳng thì song song với nhau.*



Tức là:

$$\begin{cases} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b.$$

5. *Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

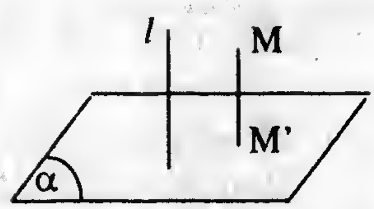


Tức là:

$$\begin{cases} a \perp d \\ \alpha \perp d \end{cases} \Rightarrow a \,//\, \alpha.$$

4. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Định nghĩa: *Phép chiếu song song trong đó phương chiếu vuông góc với mặt chiếu gọi là phép chiếu vuông góc.*

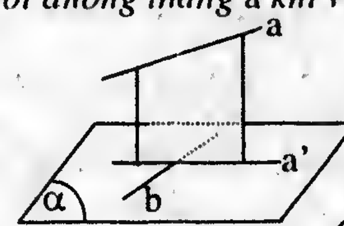


Chú ý: Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

Định lí 3 (Định lí ba đường vuông góc): *Cho đường thẳng* a *không vuông góc với mặt phẳng* α. *Một đường thẳng* b *nằm trong* α *vuông góc với đường thẳng* a *khi và chỉ khi* b *vuông góc với hình chiếu của* a *trên* α.

Tức là, với a' là hình chiếu vuông góc của a lên α thì:

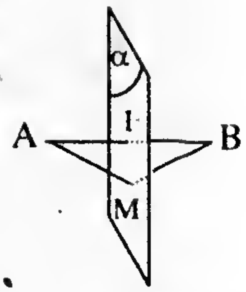
$$a \perp b \subset \alpha \Leftrightarrow a' \perp b.$$



5. MẶT PHẲNG TRUNG TRỰC

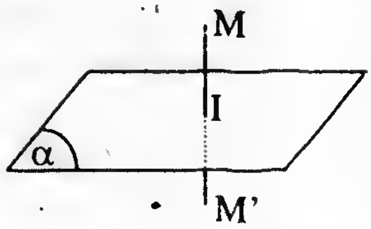
Định nghĩa: *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng đó tại trung điểm của nó.*

Định lí 4: *Tập hợp những điểm cách đều hai đầu của một đoạn thẳng là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng đó.*



6. PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MỘT MẶT PHẲNG

Định nghĩa: *Phép đối xứng qua mặt phẳng* α *là phép cho tương ứng với mỗi điểm* M *trong không gian một điểm* M' *sao cho* α *là mặt phẳng trung trực của đoạn* MM'.



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1:	Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng – Mặt phẳng trung trực. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng α, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

   Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong α.

   Cách 2: Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với α.

2. Để chứng minh mặt phẳng α là mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta đi chứng minh α vuông góc với AB tại trung điểm I của AB

3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

   Cách 1: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng b.

   Cách 2: Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

   Cách 3: Nếu hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp đã học trong hình học phẳng.

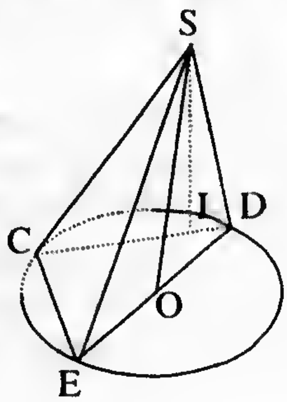
<u>Ví dụ 1:</u> Gọi I là một điểm bất kì ở trong đường tròn (O), tâm O, bán kính bằng R. CD là dây cung của đường tròn (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O).

a. Chứng minh rằng ΔSDE vuông tại S

b. Chứng minh rằng $SD \perp CE$.

c. Chứng minh rằng ΔSCD vuông.

Giải



a. Trong ΔSDE, ta có:

SO là đường trung tuyến,

$$SO = R = \frac{1}{2}.2R = \frac{1}{2}BD,$$

suy ra ΔSDE vuông tại S.

b. Ta có ngay:

$CE \perp SI$, vì SI vuông góc với đáy

$CE \perp CD$, góc chắn nửa đường tròn.

suy ra:

$CE \perp (SCD) \Rightarrow CE \perp SD.$ (1)

c. Từ kết quả câu a), ta có:

$SE \perp SD.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(SCE) \perp SD \Rightarrow SC \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại S.

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông của điểm O trên mặt phẳng (ABC).

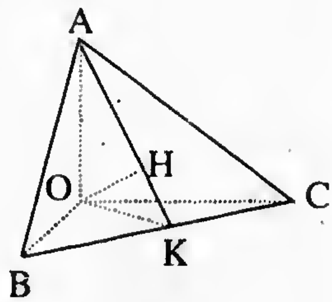
a. Chứng minh rằng $BC \perp (OAH)$, $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC.

c. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d. Chứng minh rằng các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Giải



a. Từ giả thiết:

$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC.$ (1)

Ta có:

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Leftrightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

Chứng minh tương tự ta nhận được $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH.$ (3)

$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của ΔABC.

c. Giả sử AH cắt BC tại K, suy ra $OK \perp BC$.

- Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Trong ΔOAK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}, \text{ đpcm.}$$

d. Giả sử OA = a, OB = b, OC = c.

Xét ΔABC vuông tại O, ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2,$

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2,$

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + c^2,$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{BAC}$ nhọn.

Chứng minh tương tự, ta được các góc $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ đều nhọn.

Vậy, các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Chú ý: Ví dụ trên đã trình bày cách chứng minh các tính chất cơ bản của tứ diện vuông.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.

b. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

c. Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong một mặt phẳng.

d. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

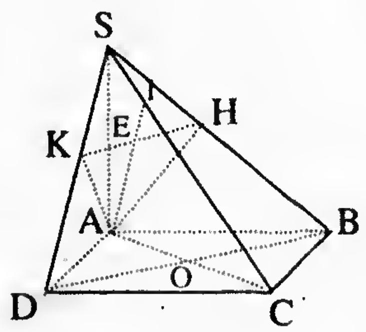
e. Tính diện tích tứ giác AHIK, biết SA = AB = a.

Giải

a. Từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC.$ (1)

Mặt khác, ta có:



$AB \perp BC$, vì ABCD là hình vuông. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta được $CD \perp (SAD)$.

b. Từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD.$ (3)

Mặt khác, ta có:

$AC \perp BD$, vì ABCD là hình vuông. (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$BD \perp (SAC)$ tại trung điểm O của BD.

Vậy, (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD.

c. Từ giả thiết và kết hợp với kết quả câu a), ta được:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Chứng minh tương tự ta được $AK \perp SC$.

Như vậy, vì AH, AI, AK cùng vuông góc với SC nên ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

d. Giả sử HK cắt AI tại E.

Nhận xét rằng:

$\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SH = SK$.

Trong ΔSBD, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \,//\, BD \text{ và E là trung điểm của HK.}$$

Kết hợp với kết quả ở câu a), suy ra:

$HK \perp (SAC)$ tại trung điểm E của HK.

Vậy, (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK.

Từ kết quả $HK \perp (SAC)$ suy ra $HK \perp AI$.

e. Ta có:

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK. \quad (5)$$

trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (6)$$

- Trong ΔSBD, ta được:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HK \text{ là đường trung bình} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

(7)

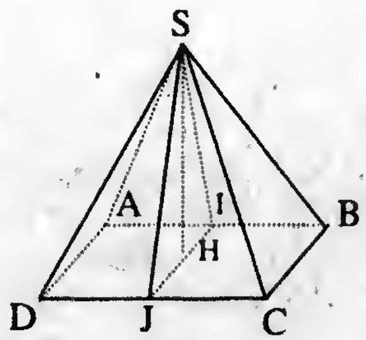
Thay (6), (7) vào (5), ta được;

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

<u>Ví dụ 4:</u> Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a. mặt bên SAB là tam giác đều; SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh rằng $SH \perp AC$ và tính độ dài SH.
c. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho $BM \perp SA$. Tính AM theo a.

Giải



a. Xét ΔSIJ, ta lần lượt có:

IJ = a, đường trung bình của hình vuông.

$SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đường cao trong tam giác đều

$SJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, trung tuyến thuộc canh huyền của tam giác vuông.

Nhận xét rằng:

$$SI^2 + SJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ \text{ vuông tại S} \Leftrightarrow SI \perp SJ.$$

Khi đó, với:

$$\begin{cases} CD \perp SJ \\ CD \perp IJ \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SI \overset{SJ \perp SI}{\Rightarrow} SI \perp (SCD).$$

Chứng minh tương tự, ta được $SJ \perp (SAB)$.

b. Ta có:

$SH \perp CD$, theo kết quả trong a) có $CD \perp (SIJ)$

$SH \perp IJ$, theo giả thiết

suy ra:

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$.

Trong ΔSIJ ta có:

$$S_{\Delta SIJ} = \frac{1}{2}SH.IJ = \frac{1}{2}SI.SJ \Rightarrow SH = \frac{SI.SJ}{IJ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

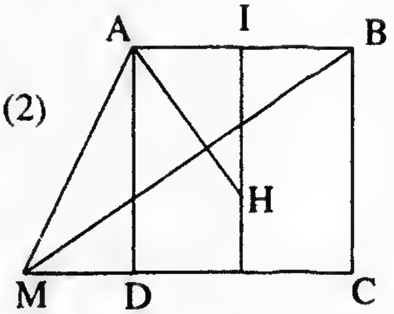
c. Điều kiện để:

$BM \perp SA \Leftrightarrow BM \perp AH$, theo định lí ba đường vuông góc.

Ta có ngay ΔAIH và ΔBCM là hai tam giác vuông đồng dạng, suy ra:

$$\frac{IH}{CM} = \frac{AI}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow CM = 2IH. \quad (1)$$

Trong ΔSIH ta có:



$$IH = \sqrt{SI^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{3a}{4}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$CM = 2.\frac{3a}{4} = \frac{3a}{2}.$$

Khi đó, trong ΔADM ta có:

$$AM^2 = AD^2 + MD^2 = AD^2 + (CM - CD)^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ (tức là } M \equiv J).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình tứ diện SABC có ΔABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

b. Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh rằng $AH \perp SC$.

Bài tập 2: Cho hình tứ diện ABCD có ΔABC và ΔDBC là hai tam giác cân có chung đáy, gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh rằng $BC \perp AD$, từ đó suy ra $BC \perp (AID)$.

b. Vẽ đường cao AH của ΔAID. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Bài tập 3: Cho hình tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, biết rằng $SB = SD$.

a. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

b. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Chứng minh rằng $SH = SK$, $OH = OK$ và $HK // BD$.

c. Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$ và $SB = SD$.

a. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$ và $AC \perp SD$.

b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAB là tam giác đều $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a. Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

b. Chứng minh rằng $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a, đáy ABCD là hình thang vuông đường cao AB = a, BC = 2a. Ngoài ra còn có SC vuông góc với BD.

a. Chứng minh rằng ΔSBC vuông.

b. Tính AD.

c. Gọi M là một điểm trên đoạn SA, đặt AM = x, với $0 \le x \le a$. Tính độ dài của đường thẳng cao DE trong ΔBDM theo a và x. Xác định x để DE có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = 2a, ABC là tam giác vuông tại C với AB = 2a, $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a. Chứng minh rằng $AH \perp BM$.

b. Đặt AM = x, với $0 \le x \le \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài tập 9: Cho ΔABC có BC = 2a và đường cao AD = a. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A ta lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của SB và SC.

a. Chứng minh rằng $BC \perp (SAD)$.

b. Gọi H là hình chiếu của A trên EF. Chứng minh rằng AH nằm trong (SAD). Hãy cho biết vị trí của điểm H đối với hai điểm S và D.

c. Tính diện tích của ΔAEF.

Bài tập 10: Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng α. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng α tại A ta lấy hai điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC'.

a. Chứng minhrằng $CC' \perp (MBD)$.

b. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB. Chứng minh rằng K là trực tâm của ΔBCD.

Bài tập 11: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên $AA_1 = a$ và vuông góc với đáy.

a. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AI \perp BC_1$.

b. Gọi M là trung điểm BB_1. Chứng minh rằng $AM \perp BC_1$.

c. Gọi K là điểm trên đoạn A_1B_1 sao cho $KB_1 = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm B_1C_1. Chứng minh rằng $AM \perp (MKJ)$.

Bài toán 2: Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng α, α qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Dựng mặt phẳng α như sau:

- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M.
- Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là α.
- Xác định thiết diện theo phương pháp đã học.

Cách 2: Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với d thì:

α // a hay chứa a

α // b hay chứa b

Ví dụ 1: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AC, α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AC.

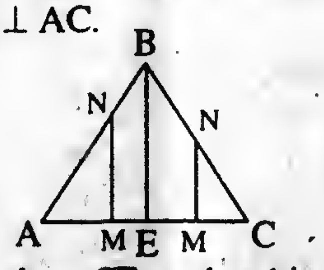
a. Tuỳ theo vị trí của điểm M trên cạnh AC, có nhận xét gì về thiết diện tạo bởi α với tứ diện S.ABC.

b. Đặt CM = x, với $0 < x < a$. Tính diện tích S của thiết diện trên theo a và x và xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải

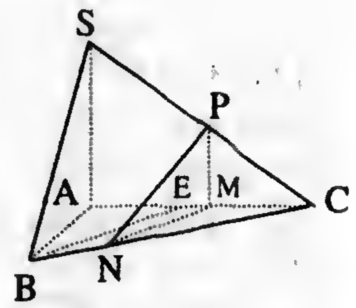
a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có ngay $BE \perp AC$. Do đó, cần xét hai trường hợp khác nhau về vị trí của điểm M trên cạnh AC và trong đó ta sử dụng:

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$.



Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta thực hiện:

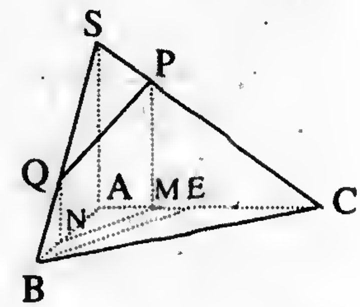
- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt BC tại N (ta được $MN \perp AC$).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được $MP \perp AC$).



Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là ΔMNP vuông tại M.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE (trừ điểm E).

- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt AC tại N (ta được $MN \perp AC$).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được $MP \perp AC$).
- Trong (SAB) dựng Nz // SA và cắt SB tại Q (ta được $NQ \perp AC$).



Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là hình thang vuông MNQP (vuông tại M và N).

b. Ta xét hai trường hợp của điểm M

Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta có $0 < x \le \frac{a}{2}$ và diện tích ΔMNP là:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}MN.MP. \quad (1)$$

Trong ΔBCE, ta có:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{CM}{CE} = \frac{x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = x\sqrt{3}. \quad (2)$$

Trong ΔSAC, ta có:

$$\frac{MP}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{x}{a} \Rightarrow MP = x \text{ – } \textit{Cách tính thứ nhất.} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}.x\sqrt{3}.x = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

ta có ngay:

$$(S_{\Delta MNP})_{Max} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8},$$

đạt được khi $x = \frac{a}{2}$.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE, ta có $\frac{a}{2} < x < a$ và diện tích MNQP là:

$$S_{MNQP} = \frac{1}{2}(MP + NQ).MN. \quad (4)$$

Trong ΔABE, ta có:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AE} = \frac{a-x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = \sqrt{3}(a-x). \quad (5)$$

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ΔPMC vuông cân tại N, do đó:

$$MP = CE = x \text{ – } \textit{Cách tính thứ hai.} \quad (6)$$

Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{NQ}{SA} = \frac{BN}{BA} = \frac{ME}{EA} = \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow NQ = 2x - a. \quad (7)$$

Thay (5), (6), (7) vào (4), ta được:

$$S_{MNQP} = \frac{1}{2}(x + 2x - a).\sqrt{3}(a-x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x).$$

ta biến đổi tiếp:

$$S_{MNQP} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2 - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{a^2}{9} - \left(x - \frac{2a}{3}\right)^2\right] \le \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

suy ra $(S_{MNQP})_{Max} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x = \dfrac{2a}{3}$.

Tóm lại, ta được:

$$S_{td} = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} & \text{víi } 0 < x \le \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x) & \text{víi } \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

và $(S_{td})_{Max} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x = \dfrac{2a}{3}$.

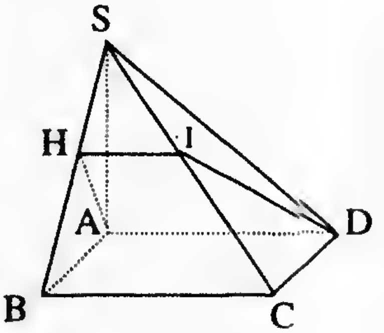
__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với (ABCD). Gọi AH là đường cao của ΔSAB.

a. Tính tỉ số $\dfrac{SH}{SB}$ và độ dài AH.

b. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB, α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của thiết diện.

Giải

a. Trong ΔSAB vuông tại S, ta có:



$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{AB^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

b. Dựng thiết diện:

- Trong (SBC) dựng $Hx \perp SB$ và cắt SC tại I.
- Nối D với I, ta được thiết diện là tứ giác AHID.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Trong mặt phẳng (SBC), ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ HI \perp SB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HI // BC // AD \\ HI \perp AH \end{cases} \Rightarrow \text{AHID là hình thang vuông tại A và H.}$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{HI}{BC} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2a}{3}.$$

Từ đó:

$$S_{AHID} = \frac{1}{2}(AD + HI).AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2a}{3}\right).\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}.$$

<u>Ví dụ 3:</u> Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, α cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

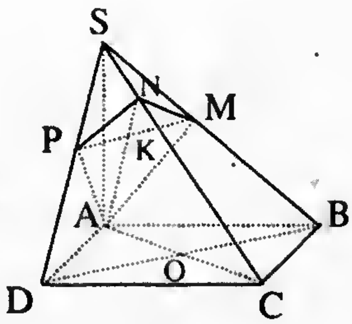
a. Chứng minh rằng $AM \perp SB$, $AP \perp SD$ và $SM.SB = SN.SC = SP.SD = SA^2$.

b. Chứng minh rằng tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c. Gọi O là giao điểm của AC và BD; K là giao điểm của AN và MP. Chứng minh rằng ba điểm S, K, O thẳng hàng.

d. Tính diện tích tứ giác AMNP.

Giải



Dựng thiết diện:

- Trong (SAC) dựng $AN \perp SC$.
- Trong (SBC) dựng $Nx \perp SC$ và cắt SB tại M.
- Trong (SCD) dựng $Ny \perp SC$ và cắt SD tại P.

Thấy ngay A, M, N, P đồng phẳng vì cùng thuộc mặt phẳng qua N (hoặc A) và vuông góc với SC.

a. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM. \qquad (1)$$

Mặt khác, theo cách dựng ta có:

$$SC \perp (AMNP) \Rightarrow SC \perp AM. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB.$$

Chứng minh tương tự, ta được $AP \perp SD$.

Các ΔSAB, ΔSAC, ΔSAD cùng vuông tại A và lần lượt có các đường cao AM, AN, AP, suy ra:

$$SA^2 = SM.SB = SN.SC = SP.SD. \qquad (3)$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AP \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp MN \\ AP \perp PN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{AMN} = 90^0 \\ \widehat{APN} = 90^0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AMNP nội tiếp đường tròn đường kính AN.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AN.$$

Dễ thấy SB = SD, do đó từ (3):

$$SM.SB = SP.SD \Leftrightarrow SM.SD = SP.SB \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD}$$

$$\Rightarrow MP \parallel BD \Rightarrow MP \perp AN.$$

Vậy, tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c. Ta có:

$$\begin{cases} S, K, O \in (SAC) \\ S, K, O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow \text{ba điểm S, K, O thẳng hàng.}$$

d. Ta có:

$$S_{AMNP} = \frac{1}{2}AN.MP. \qquad (4)$$

trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AN = a. \qquad (5)$$

- Trong ΔSBD, ta được:

$$\frac{MP}{BD} = \frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow MP = \frac{2a\sqrt{2}}{3} \qquad (6)$$

Thay (5), (6) vào (4), ta được;

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2}.a.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi α là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tìm thiết diện của tứ diện với α và tính diện tích của thiết diện này.

Bài tập 2: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi α là mặt phẳng qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB.

a. Tìm thiết diện của tứ diện với α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 3: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với (ABC). Gọi α là mặt phẳng trung trực của SB, O là trung điểm của BC, d là đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC).

a. Tìm giao điểm K của d với mặt phẳng α.

b. Tính độ dài OK.

Bài tập 4: Cho hình tứ diện S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với (ABC). M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB, đặt AM = x, với 0 < x < a. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Tìm thiết diện của tứ diện với α và tính diện tích của nó.

Bài tập 5: Cho hình tứ diện S.ABC có hai mặt ABC và SBC là các tam giác đều cạnh bằng a và $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB, đặt AM = x, với 0 < x < a. Gọi α là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC.

a. Gọi D là trung điểm BC, Chứng minh rằng α // (SAD)

b. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với α. Thiết diện là hình gì ?

c. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Bài tập 6: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm AH. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O, lấy điểm S sao cho OS = 2a. Gọi I là một điểm trên OH, đặt x = AI, với a < x < 2a. Gọi α là mặt phẳng qua I và vuông góc với OH.

a. Tìm thiết diện của tứ diện SABC với α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD có dáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD = 2a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một diểm trên cạnh AB, α là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB. Đặt x = AM, với $0 < x < a$.

a. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD với α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện theo a và x

Bài tập 8: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, tâm O. Trên dường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O lấy diểm S sao cho $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi α là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, α cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Tính dộ dài doạn AN. Chứng minh rằng N là trung diểm SC.

b. Chứng minh rằng MP // BD. Từ dó, suy ra cách dựng M và P.

c. Chứng minh rằng tứ giác AMNP có hai dường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích của tứ giác này.

Bài tập 9: Cho hình thoi ABCD có tâm O với các dường chéo AC = 4a, BD = 2a. Trên dường thẳng vuông góc với (ABCD) tại O ta lấy diểm S sao cho $SO = 2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng α qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Chứng minh tứ giác AMNP có hai dường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích từ tứ giác AMNP.

b. Chứng minh rằng MNP là tam giác dều.

Bài tập 10: Cho hình tứ diện SABC có ABC là tam giác dều cạnh a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tìm thiết diện của tứ diện SABC với mặt phẳng α và tính diện tích của thiết diện trong các trường hợp sau:

a. α qua S và vuông góc với BC.

b. α qua A và vuông góc trung tuyến SI của ΔSBC.

c. α qua trung điểm M của SC và vuông góc với AB.

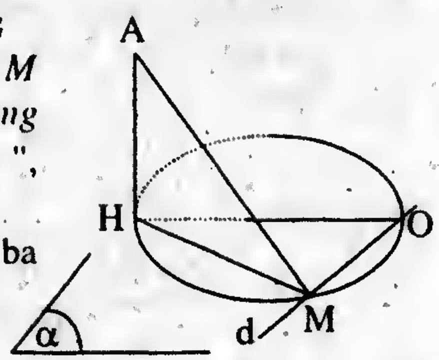
Bài tập 11: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có dáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên AA' = a vuông góc với mặt phẳng (ABC). Có nhận xét gì về thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α và tính diện tích thiết diện trong mỗi trường hợp sau:

a. α qua A và vuông góc với B'C.

b. α qua B' và vuông góc với A'I, với I là trung điểm của cạnh BC.

Bài toán 3: Tập hợp hình chiếu của một diểm cố dịnh trên một dường thẳng di dộng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Với yêu cầu " *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc M của điểm cố định A trên đường thẳng d di động trong mặt phẳng α cố định và luôn qua một điểm cố định O* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Dựng $AH \perp \alpha$ ($H \in \alpha$), theo định lí ba dường vuông góc ta có:

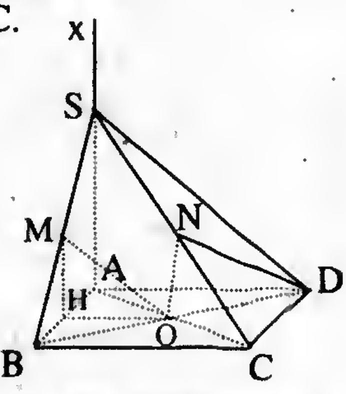
$HM \perp d$.

Bước 2: Trong mặt phẳng α, vì $\widehat{HMO} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong α.

Ví dụ 1: Cho hình vuông ABCD tâm O; S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB.

b. Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D trong ΔSDC.



Giải

a. Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng (SAB) cố định và đi qua điểm B cố định.

Hạ OH ⊥ AB, từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp OH \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB, suy ra:

SB ⊥ MH, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{BMH} = 90^0 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường kính BH chứa trọng (SAB).

Khi S di động trên tia Ax thì M thuộc nửa đường tròn đường kính BH trong nửa mặt phẳng (SAB) bờ AB.

b. Nhận thấy đường thẳng SC nằm trong mặt phẳng (SAC) cố định và đi qua điểm C cố định.

Ta có:

$$\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC).$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng SC, suy ra:

ON ⊥ SC, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{ONC} = 90^0 \Rightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính OC chứa trong (SAC).

Khi S di động trên tia Ax thì N thuộc nửa đường tròn đường kính OC trong nửa mặt phẳng (SAC) bờ AC.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α cho góc vuông xOy, d là đường thẳng cố định trong α, d cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi Oz là tia vuông góc với α, S là một điểm trên Oz. Gọi AE, BF là đường cao của ΔSAB.

a. Cho góc xOy cố định, S di động trên ta Oz. Tìm tập hợp các điểm E và F.

b. Cho S cố định, góc xOy quay quanh O. Chứng minh rằng trực tâm của ΔSAB cố định. Tìm tập hợp các điểm E và F.

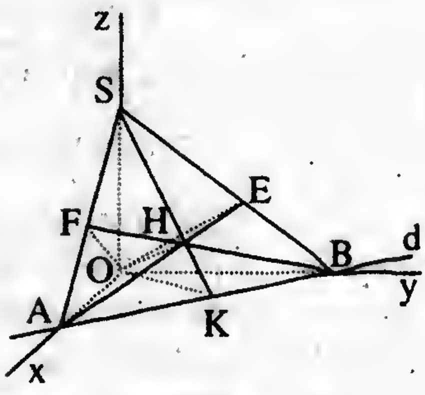
Giải

a. Ta lần lượt tìm tập hợp các điểm E và F.

- *Tìm tập hợp điểm E*: Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng (yOz) cố định và đi qua điểm B cố định.

  Ta có:

$$\begin{cases} AO \perp BO \\ AO \perp SO \end{cases} \Rightarrow AO \perp (xOz)$$



$\Rightarrow OE \perp SB$, theo định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow \widehat{OEB} = 90^0$

$\Rightarrow$ E thuộc đường tròn đường kính OB chứa trong (yOz).

Khi S đi động trên tia Oz thì E thuộc nửa đường tròn đường kính OB trong nửa mặt phẳng (yOz) bờ Oy.

- *Tìm tập hợp điểm F*: Thực hiện tương tự ta được F thuộc nửa đường tròn đường kính OA trong nửa mặt phẳng (xOz) bờ Ox.

b. Giả sử $AE \cap BF = H$, suy ra H là trực tâm của ΔSAB và ta đi chứng minh H cố định.

Kéo dài SH cắt AB tại K, ta có:

$$\begin{cases} AB \perp SK \\ AB \perp SO \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (SOK) \Rightarrow AB \perp OK \Rightarrow K \text{ cố định} \Rightarrow H \text{ cố định.}$$

Trong mặt phẳng (S, d) cố định và có SH cố định và:

- Vì $\widehat{SEH} = 90^0$ nên E thuộc nửa đường tròn đường kính SH trong nửa mặt phẳng (SBK) bờ SK.
- Vì $\widehat{SFH} = 90^0$ nên F thuộc nửa đường tròn đường kính SH trong nửa mặt phẳng (SAK) bờ SK.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I là trung điểm của cạnh SC, M là một điểm di động trên cạnh AD.

a. Tìm tập hợp các điểm K, hình chiếu vuông góc của I trên CM.

b. Tìm tập hợp chân đường cao E vẽ từ đỉnh B trong ΔSBM.

Bài tập 2: Cho ΔABC đều, S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên SB.

b. Gọi N là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBC). Chứng minh rằng đường thẳng SN qua trung điểm của BC. Tìm tập hợp các điểm N.

c. Gọi K là trung điểm của cạnh SC. Chứng minh rằng BK ở trong một mặt phẳng cố định. Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của A trên BK.

Bài tập 3: Cho ΔABC đều ở trong mặt phẳng α. Vẽ Bx và Cy là hai tia cùng chiều và cùng vuông góc với α. Cho M, N là hai điểm lần lượt di động trên Bx, Cy. Tìm tập hợp chân H của đường cao AH của ΔAMN khi M, N di động thỏa một trong các điều kiện dưới đây:

a. BM = CN.

b. 2BM = CN.

c. BM + CN = 2a, với a là độ dài không đổi.

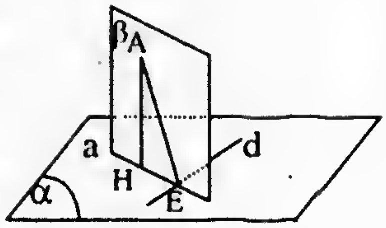
Bài toán 4: Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của một điểm cố định trên một mặt phẳng di động.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với yêu cầu " *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc H của một điểm cố định A trên mặt phẳng α di động luôn chứa một đường thẳng d cố định* ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định mặt phẳng β qua A vuông góc với d. Tìm $a = \alpha \cap \beta$

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a, thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên α.

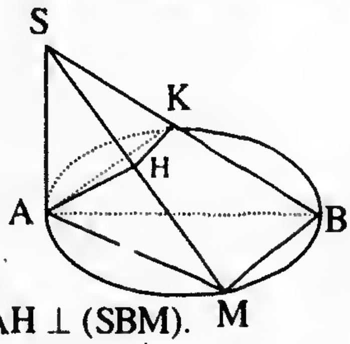


Bước 3: Gọi E là giao điểm của d với β. Trong mặt phẳng β, $\widehat{AHE} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C), đường kính AB, SA vuông góc với α. Gọi M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (SBM). Tìm tập hợp các điểm H.

Giải

Nhận thấy mặt phẳng (SBM) chứa đường thẳng SB cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua A và vuông góc với SB bằng cách:



- Trong (SAB) hạ $AK \perp SB$.
- Trong (SBM) dựng $Kx \perp SB$ và cắt SM tại H.

Khi đó:

$(AKH) \perp SB$ và $(AKH) \cap (SBM) = KH$.

Ta đi chứng minh $AH \perp (SBM)$, thật vậy:

$$\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BM \perp (SAM) \Rightarrow BM \perp AH \overset{SB \perp AH}{\Rightarrow} AH \perp (SBM).$$

Trong (AKH), ta có:

$$AH \perp HK \Leftrightarrow \widehat{AHK} = 90^0$$

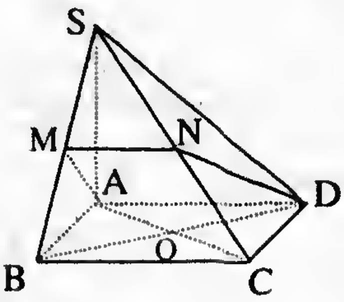
nên H thuộc đường tròn đường kính AK trong mặt phẳng (AKH).

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^0$, SO = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên cạnh SB.

a. Khi M là trung điểm của cạnh SB, tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (ADM).

b. Khi M di động trên cạnh SB. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ADM).

Giải

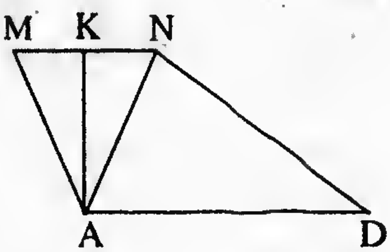


a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (ADM) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADM) \cap (SBC) = Mx \end{cases}$$

$$\Rightarrow Mx // AD // BC$$

và Mx cắt SC tại N.



Khi đó, ta nhận được thiết diện AMND là hình thang.

Trong hình thang AMND hạ $AK \perp MN$, ta được:

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN).AK \qquad (1)$$

trong đó:

- Trong ΔSBC có MN là đường trung bình nên:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

- Trong ΔSAB vuông tại A có AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

- Trong ΔSAC vuông tại A có AN là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AN = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (4)$$

- Trong ΔAMN cân tại A, ta có:

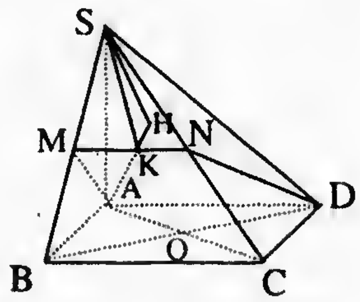
$$AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}. \quad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được;

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{16}.$$

b. Nhận thấy mặt phẳng (ADM) chứa đường thẳng AD cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua S và vuông góc với AD bằng nhận xét:

$$AK \perp MN \Leftrightarrow AK \perp AD$$



Khi đó:

$(SAK) \perp AD$ và $(SAK) \cap (ADM) = AK$.

Trong (SAK) hạ $SH \perp AK$ thì H cũng là hình chiếu vuông góc của S trên (ADM).

Trong (SAK), ta có:

$$SH \perp AH \Leftrightarrow \widehat{SHA} = 90^0$$

nên H thuộc đường tròn đường kính SA trong mặt phẳng (SAK).

Hạn chế quĩ tích – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình tứ diện S.ABC có SI vuông góc với mặt phẳng (ABC) và I là trung điểm của cạnh AB. M là một điểm di động trên cạnh SC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABM).

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC vuông tại B. Gọi M là một điểm trên cạnh SA. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (MBC) khi M đi động từ S đến A.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (γ) tâm O, A là điểm cố định trên (γ) và BC là dây cung di động của (γ) luôn vuông góc với OA. Trên đường thẳng vuông góc với α tại A lấy điểm cố định S khác A. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBC).

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD tâm O, trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm S.

a. Cho S đi động trên tia Ax. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SBC).

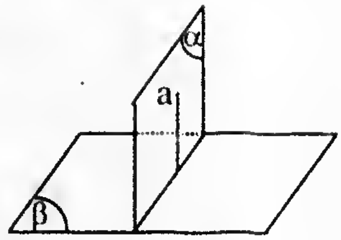
b. Cho S cố định, M là một điểm đi động trên đoạn AC. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SMB).

CHỦ ĐỀ 3

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

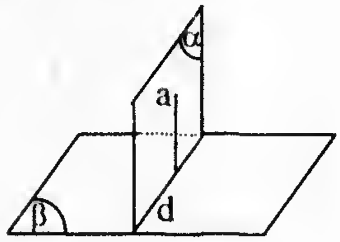
1. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC



***Định nghĩa**: Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*

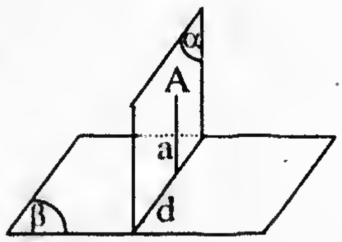
Như vậy: $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \exists a \in \alpha: a \perp \beta$.

2. CÁC TÍNH CHẤT



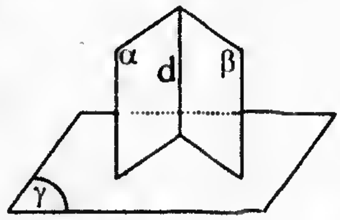
***Định lí 1**: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.*

Tức là: $\begin{cases} \alpha \perp \beta \text{ vμ } \alpha \cap \beta = d \\ a \in \alpha \text{ vμ } a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp \beta.$



***Định lí 2**: Nếu hai mặt phẳng α và β vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trên α thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với β sẽ nằm trong α.*

Tức là: $\begin{cases} \alpha \perp \beta \text{ và } A \in \alpha \\ A \in a \perp \beta \end{cases} \Rightarrow a \in \alpha.$



***Định lí 3**: Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

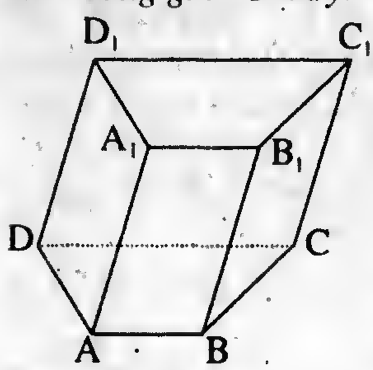
Tức là: $\begin{cases} \alpha \cap \beta = d \\ \alpha \perp \gamma \text{ và } \beta \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow d \in \gamma.$

***Định lí 4**: Qua một đường thẳng không vuông góc với một mặt phẳng, ta dựng được một và chỉ một và chỉ một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng ấy.*

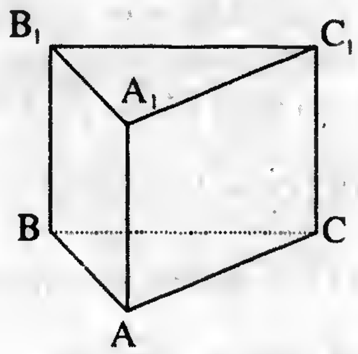
3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

***Định nghĩa**: Một hình lăng trụ được gọi là hình lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với các mặt đáy.*

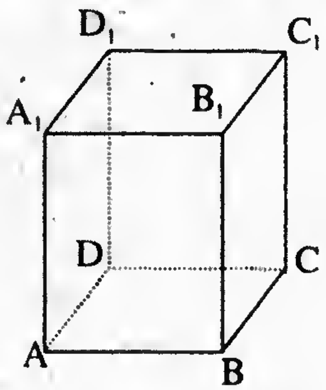
Nhận xét rằng *các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật và đều vuông góc với đáy.*



Lăng trụ



Lăng trụ đứng



Lăng trụ đều

Ta có các trường hợp:

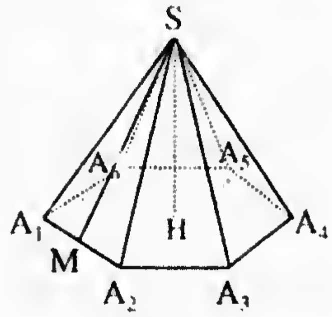
1. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là một miền đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.* Như vậy, lăng trụ đều có các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
2. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.* Như vậy, hình hộp đứng có bốn mặt bên là những hình chữ nhật và hai đáy là hình bình hành.
3. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.* Như vậy, hình hộp chữ nhật có sáu mặt đều là những hình chữ nhật.
4. *Hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*

4. HÌNH CHÓP ĐỀU

Định nghĩa: *Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là miền đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đa giác đều đó.*

Nhận xét rằng *các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và các mặt bên của nó là những tam giác cân bằng nhau.*

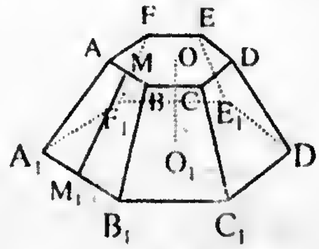
Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bất kì gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.



5. HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa: *Một hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

Khi đó:



- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng.
- Đường nối tâm OO_1 của hai đáy gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1:	Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
2. Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ngoài những cách ta biết, ta còn có thêm hai cách sau:

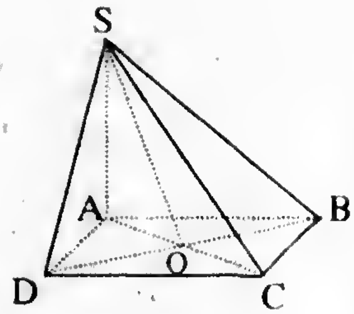
   Cách 1: Sử dụng kết quả của định lí 1.

   Cách 2: Sử dụng kết quả của định lí 3.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và SA = SB = SC = a.

a. Chứng minh rằng (SBD) ⊥ (ABCD).

b. Chứng minh rằng ΔSBD vuông.



Giải

a. Gọi O là tâm của hình thoi, ta có:

AC ⊥ SO, vì ΔSAC cân tại S

AC ⊥ BD, vì ABCD là hình thoi

suy ra:

(SBD) ⊥ AC ∈ (ABCD) ⇒ (SBD) ⊥ (ABCD).

b. Nhận xét rằng:

ΔDAC = ΔSAC = ΔBAC (c.c.c) ⇒ OD = OS = OB

⇒ ΔSBD vuông tại S vì có trung tuyến bằng nửa cạnh huyền.

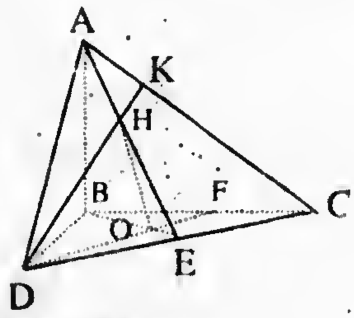
Ví dụ 2: Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC), (ABD) cùng vuông góc với mặt phẳng (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD và đường cao DK của ΔACD.

a. Chứng minh rằng AB ⊥ (BCD).

b. Chứng minh rằng (ABE) ⊥ (ADC) và (DFK) ⊥ (ADC).

c. Gọi O và H lần lượt là trực tâm của ΔBCD và ΔACD. Chứng minh rằng OH ⊥ (ACD).

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(ABD)=AB\\(ABC)\perp(BCD)\ \text{và}\ (ABD)\perp(BCD)\end{cases}$$

⇒ AB ⊥ (BCD).

b. Ta có:

$$\begin{cases}CD\perp BE\\CD\perp AB\end{cases}\Rightarrow (ABE)\perp CD\in(ACD)\Rightarrow(ABE)\perp(ADC).$$

Ta có:

$$\begin{cases}DF\perp BC\\DF\perp AB\end{cases}\Rightarrow DF\perp(ABC)\Rightarrow DF\perp AC.\qquad(1)$$

Mặt khác, ta lại có:

DK ⊥ AC. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

(DFK) ⊥ AC ∈ (ACD) ⇒ (DFK) ⊥ (ADC).

c. Từ kết quả trong b) là:

(ABE) ⊥ CD ⇒ AE ⊥ CD ⇒ AE ∩ DK = H.

Ta có:

$$\begin{cases}(ABE)\cap(DFK)=OH\\(ABD)\perp(ACD)\ \text{và}\ (DFK)\perp(ACD)\end{cases}\Rightarrow OH\perp(ACD).$$

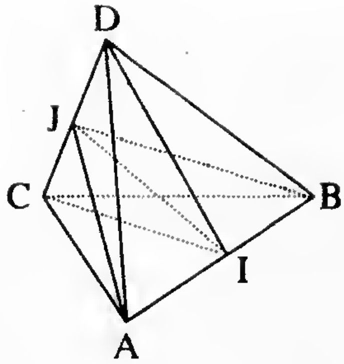
Ví dụ 3: Cho ΔACD và ΔBCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, AC = AD = BC = BD = a và CD = 2x. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh rằng IJ vuông góc với AB và CD.

b. Tính AB và IJ theo a và x.

c. Xác định x sao cho (ABC) ⊥ (ABD).

Giải



a. Xét ΔACD và ΔBCD, ta có:

CD chung

AC = AD = BC = BD

suy ra:

AJ = BJ ⇔ ΔJAB cân tại J ⇒ IJ ⊥ AB.

Xét ΔCAB và ΔDAB, ta có:

AB chung

AC = AD = BC = BD

suy ra:

DI = CI ⇔ ΔICD cân tại I ⇒ IJ ⊥ CD.

b. Trong ΔAJC vuông tại J, ta có:

$$AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow AJ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ AJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ.$$

Trong ΔAJB vuông cân tại J, ta có:

$$AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \text{ và } IJ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ DI \perp AB \end{cases}$$

do đó, để (ABC) ⊥ (ABD) điều kiện là:

DI ⊥ (ABC) ⇒ DI ⊥ CI ⇔ ΔICD vuông tại đỉnh I

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = \frac{1}{2}.2x \Leftrightarrow a = x\sqrt{3}.$$

Vậy, với $a = x\sqrt{3}$ thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại B và AD vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng (ABD) ⊥ BCD.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên (SAC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi I là trung điểm SC.

a. Chứng minh rằng (SBC) ⊥ (SAC).

b. Chứng minh rằng (ABI) ⊥ (SBC).

Bài tập 3: Cho ΔABC vuông tại A. Vẽ BB_1 và CC_1 cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng $(ABB_1) \perp (ACC_1)$.

b. Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và ΔAB_1C_1. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BCC_1B_1) và (AB_1C_1) cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).

Bài tập 4: Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để :

a. $(ABC) \perp (BCD)$.

b. $(ABC) \perp (ACD)$.

Bài tập 5: Cho ΔABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh rằng:

a. $(SAB) \perp (SAC)$.

b. $(SBC) \perp (SAD)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

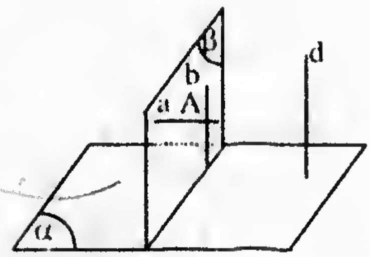
Bài toán 2: Xác định mặt phẳng β chứa đường thẳng a và vuông góc với mặt phẳng α (a không vuông góc với α) – Thiết diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một điểm A trên a sao cho qua A có thể dựng được đường thẳng b vuông góc với α một cách dễ nhất.

Bước 2: Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng β cần dựng.



Chú ý: Nếu có đường thẳng $d \perp \alpha$ thì $\beta // d$ hay β chứa d.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O và cạnh a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi α là mặt phẳng qua O, trung điểm M của SD và vuông góc với (ABCD). Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Gọi β là mặt phẳng qua A, trung điểm E của CD và vuông góc với (SBC). Hãy xác định mặt phẳng β, mặt phẳng β cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

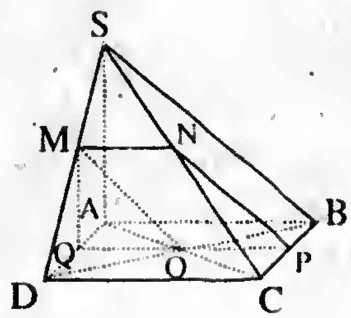
Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:

- *Xác định mặt phẳng α:* Trong (SAD) dựng Mx // SA và cắt AD tại Q là trung điểm của AD, ta có:

$$MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \in \alpha.$$

Vậy α là mặt phẳng (OMQ).



- *Xác định thiết diện:* Kéo dài QO cắt BC tại P là trung điểm của BC, ta có:

$$\begin{cases} PQ \in \alpha \text{ và } CD \in (SCD) \\ PQ // CD \\ \alpha \cap (SCD) = My \end{cases} \Rightarrow My // CD // PQ$$

và My cắt SC tại N là trung điểm của SC.

Vậy, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình thang vuông MNPQ.

- *Tính diện tích thiết diện:* Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

trong đó:

$MN = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, vì MN là đường trung bình của ΔSCD,

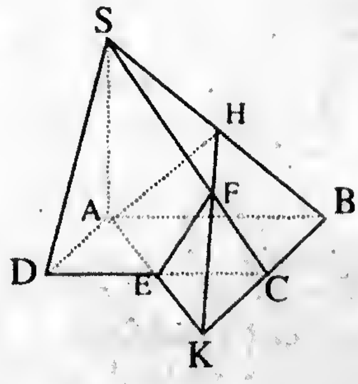
$PQ = a$,

$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAD,

suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$

b. Ta lần lượt thực hiện:



- *Xác định mặt phẳng* β: Trong (SAB) hạ AH ⊥ SB và H là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

Như vậy:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \in \beta.$$

Vậy β là mặt phẳng (AHE).

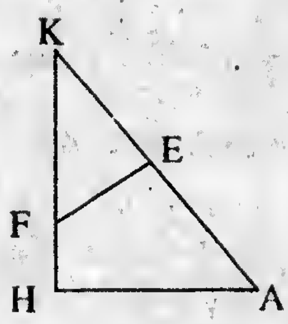
- *Xác định thiết diện*: Kéo dài AE cắt BC tại K, nối HK cắt SC tại F.

Vậy, mặt phẳng β cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là tứ giác AEFH.

- *Tính diện tích thiết diện*: Ta có:

$$S_{AEFH} = S_{\Delta HAK} - S_{\Delta EKF}$$
$$= \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\sin\widehat{EKF} = \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\frac{AH}{AK}.$$

Trong ΔSAB, ta có:



$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔADE, ta có:

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong ΔKAB, ta có:

$$CE \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \Rightarrow KE = AE = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } AK = 2AE = a = a\sqrt{5}.$$

Trong ΔHAK vuông tại H, ta có:

$$KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔSBK, ta có SC và SH là hai đường trung tuyến, do đó:

$$KF = \frac{2}{3}KH = a\sqrt{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{AEFH} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình vuông cạnh a. $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi α là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD).

a. Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng (SAD) $\perp$ (SCD) và (SAC) $\perp$ (SBC).

b. Gọi α là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC). Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a. Giả sử hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Gọi E là trung điểm của SA, , M là một điểm trên cạnh AD, đặt AM = x, với $0 \le x \le a$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAD).

a. Hãy xác định mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Tìm tập hợp hình chiếu của D trên α khi M di động trên cạnh AD.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB, M là một điểm trên cạnh AB, đặt AM = x, với $0 \le x < a$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAB).

a. Hãy xác định rõ mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

b. Chứng minh rằng $FM = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

c. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên α. Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên cạnh AB.

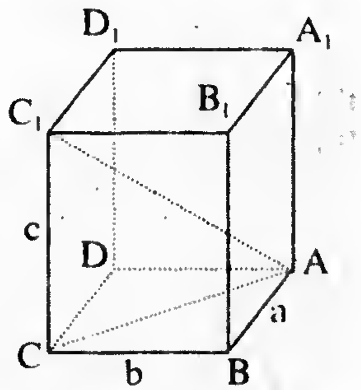
Bài toán 3: Hình lăng trụ đứng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ đứng để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ đứng cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$. Chứng minh rằng các đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng nhau và bằng $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Giải



Nhận xét rằng hai hình chữ nhật AA_1C_1C và BB_1D_1D bằng nhau, suy ra:

$$AC_1 = A_1C = BD_1 = D_1B$$

tức là, các đường chéo của hình hộp chữ nhật bằng nhau.

Trong ΔABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2.$$

Trong ΔACC_1 vuông tại C, ta có:

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + C_1C^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

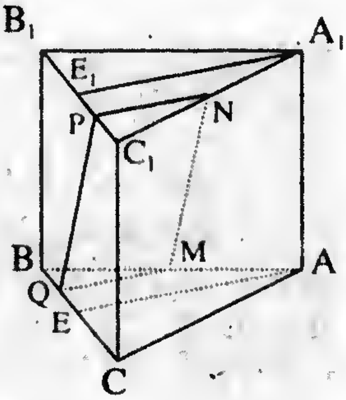
Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1C_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua MN và vuông góc với (BCC_1B_1). Thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

Giải

a. Gọi E, E_1 theo thứ tự là trung điểm của BC và B_1C_1, ta có ngay:



$$AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (BCC_1B_1).$$

$$A_1E_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow A_1E_1 \perp (BCC_1B_1).$$

$$AE \overset{//}{=} A_1E_1.$$

Do đó:

- Dựng Mx // AE cắt BC tại Q là trung điểm của BE.
- Dựng Ny // A_1E_1 cắt B_1C_1 tại P là trung điểm của E_1C_1.

Vì MQ // NP nên M, N, P, Q đồng phẳng, do vậy MNPQ chính là thiết diện cần dựng.

Nhận xét rằng:

$$MQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AE \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1E_1 \overset{//}{=} NP \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

$$MQ \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow MQ \perp PQ.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

b. Ta có:

$$S_{MNPQ} = MQ.NP.$$

Trong ΔABC, ta có:

$$AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ đều và có cạnh bằng a.}$$

Trong ΔABE, ta có:

$MQ = \frac{1}{2}AE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, vì MQ là đường trung bình.

Trong ΔECC_1, ta có:

$$PQ = EC_1 = \sqrt{EC^2 + C_1C^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng một hình hộp có:

a. Hai mặt chéo vuông góc với nhau là một hình hộp chữ nhật.

b. Bốn đường chéo bằng nhau là một hình hộp chữ nhật.

Bài tập 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng:

a. $AC_1 \perp (A_1BD)$ và $AC_1 \perp (CB_1D_1)$.

b. $BC_1 \perp (A_1B_1CD)$.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và AB = a, AA_1 = a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A_1C_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua MN và vuông góc với (BCC_1B_1). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng β qua A và vuông góc với B_1C. Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

c. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng γ qua B_1 và vuông góc với A_1I, với I là trung điểm của cạnh BC. Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b, CC_1 = c. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và C_1D_1.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng α qua ME và vuông góc với (BDD_1B_1). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng β qua MN và vuông góc với (ACB_1). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 5: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$, cạnh đáy a, đường cao h. α là mặt phẳng qua A và vuông góc với B_1C. Biện luận theo a, h các dạng thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng α và tính diện tích thiết diện.

Bài tập 6: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, cạnh a. M và N là hai điểm di động lần lượt trên cạnh A_1D và BD sao cho $A_1M = DN = x\sqrt{2}$, với $0 < x < a$. Gọi α là mặt phẳng qua MN và vuông góc với (A_1B_1CD).

a. Tuỳ theo x hãy tìm thiết diện của hình lập phương và mặt phẳng α

b. Tính thiết diện khi nó là hình ngũ giác.

Bài tập 7: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Điểm M thuộc AD_1 và điểm N thuộc BD sao cho AM = DN = x, với $0 < x < a\sqrt{2}$.

a. Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN ngắn nhất.

b. Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với mặt phẳng (A_1D_1BC) khi x biến thiên.

c. Khi MN ngắn nhất, chứng minh rằng MN là đoạn thẳng vuông góc chung của AD_1 và DB và MN song song với A_1C.

Bài tập 8: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, cạnh có độ dài bằng 1. Điểm M di động trên cạnh AA' là điểm N di động trên cạnh BC sao cho AM = BN = h, với $0 < h < 1$.

a. Chứng minh khi h thay đổi thì MN luôn cắt và vuông góc với một đường thẳng cố định.

b. Gọi T là trung điểm của D_1C_1. Hãy dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNT) và hình lập phương.

c. Tính h để chu vi thiết diên dạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b, $CC_1 = c$. Gọi O, O_1 là tâm của ABCD và $A_1B_1C_1D_1$. Gọi α là mặt phẳng qua O_1 và song song với A_1D và DO

a. Hãy dựng thiết diện của hình hộp với mặt phẳng α. Thiết diện là hình gì ?

b. Tìm điều kiện của a, b, c để thiết diện là hình thoi có một góc bằng 60^0.

Bài tập 10: Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, cạnh đáy a, đường cao h. Gọi M là trung điểm của DD_1. Xác định thiết diện của lăi g trụ cắt bởi mặt phẳng (ABM). Tính diện tích của thiết diện.

Bài toán 4: Hình chóp đều – Hình chóp cụt đều.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình chóp đều và hình chóp cụt đều để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình chóp đều và hình chóp cụt dều cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

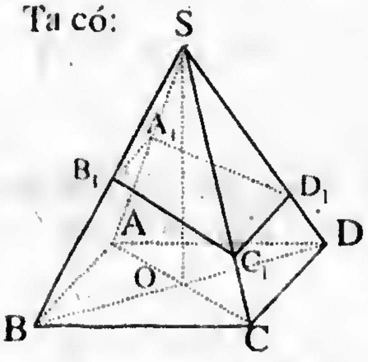
Ví dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng α cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của hình chóp theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1.

a. Xét đặc điểm của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ khi A_1B_1 hoặc A_1C_1 hoặc cả hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng (ABCD).

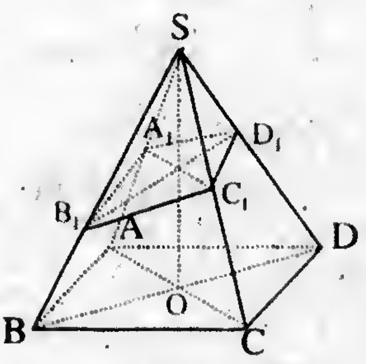
b. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{SA_1} + \dfrac{1}{SC_1} = \dfrac{1}{SB_1} + \dfrac{1}{SD_1}$.

Giải

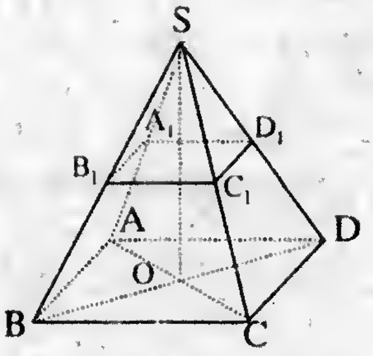
a. Ta có:



Với A_1B_1 // (ABCD)



Với A_1C_1 // (ABCD)



Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD)

- Với A_1B_1 // (ABCD) thì:

$A_1B_1 // AB // CD \Rightarrow A_1B_1 // C_1D_1$ và $A_1D_1 = B_1C_1$

Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình thang cân.

- Với $A_1C_1 // (ABCD)$ thì

  $A_1C_1 // AC$.

  Mặt khác, ta lại có:

  $$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp B_1D_1 \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D_1.$$

  Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

- Với $A_1B_1 // (ABCD)$ và $A_1C_1 // (ABCD)$ thì

  $(A_1B_1C_1D_1) // (ABCD)$

  Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông.

b. Bạn đọc tự làm

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính diện tích ΔSA_1C_1 và ΔSB_1D_1.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

a. Tính độ dài đường cao và trung đoạn của hình chóp.

b. Gọi E là trung điểm của SC, chứng minh rằng $(EBD) \perp (SAC)$.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm SB.

a. Chứng minh rằng ΔSBD vuông.

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α qua AM và vuông góc với (SBD). Tính diện tích thiết diện.

c. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng β qua DM và vuông góc với (SBD). Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 3: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh đáy a. Gọi α là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC).

a. Hãy xác định mặt phẳng α. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 4: Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh bên bằng 2a và cạnh đáy a.

a. Chứng minh rằng $(SBE) \perp (SDF)$.

b. Gọi α là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Hãy xác định mặt phẳng α. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

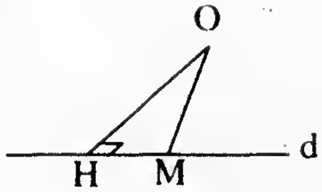
CHỦ ĐỀ 4

KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d, kẻ OH $\perp$ d với H $\in$ d.



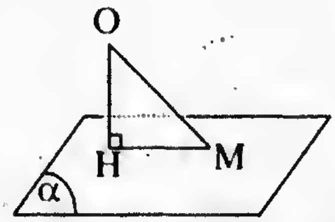
Định nghĩa: *Độ dài đoạn* OH *được gọi là khoảng cách từ điểm* O *tới đường thẳng* d.

Nhận xét:

- Khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d là bé nhất so với khoảng cách từ O đến mọi điểm của d.
- Khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d bằng 0 khi và chỉ khi O $\in$ d.

2. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

Trong không gian cho điểm O và mặt phẳng α, gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên α.



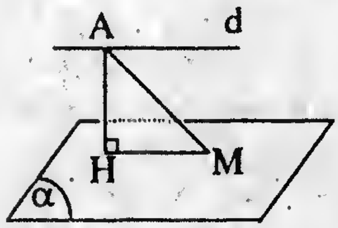
Định nghĩa: *Độ dài đoạn* OH *được gọi là khoảng cách từ điểm* O *tới mặt phẳng* α.

Nhận xét:

- Khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α là bé nhất so với khoảng cách từ O đến mọi điểm của α.
- Khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α bằng 0 khi và chỉ khi O $\in$ α.

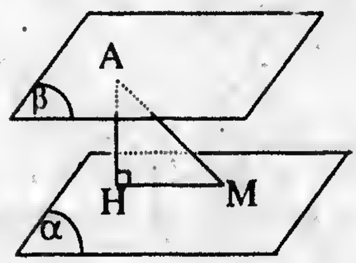
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong không gian cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α. Lấy điểm A bất kì trên d, gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên α.



Định nghĩa: *Độ dài đoạn* AH *được gọi là khoảng cách từ đường thẳng* d *tới mặt phẳng* α.

Nhận xét: Khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng α là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm tuỳ ý thuộc d tới một điểm bất kì của α.



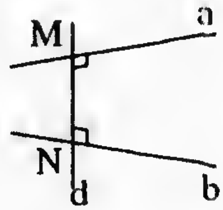
4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Trong không gian cho hai mặt phẳng α, β song song với mhau.

Định nghĩa: *Khoảng cách từ một điểm tuỳ ý của* α *tới* β *được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng* α *và* β.

Nhận xét: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng α và β là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm tuỳ ý thuộc α tới một điểm bất kì của β.

5. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU



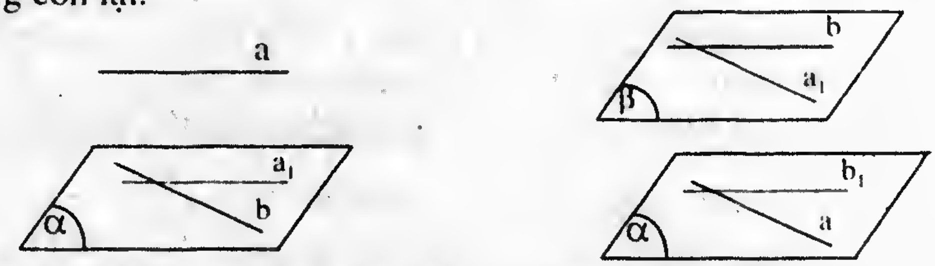
Định lí: *Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn có duy nhất một đường thẳng d cắt cả a và b, và vuông góc với mỗi đường thẳng ấy. Đường thẳng d được gọi là đường vuông góc chung của a và b.*

Giả sử d cắt a, b theo thứ tự tại M và N.

Định nghĩa: *Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b. Độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.*

Nhận xét: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa:

- Một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.



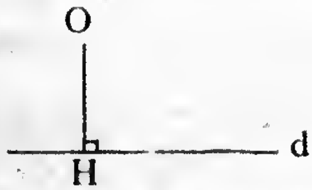
- Hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Từ đó suy ra " *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy* ".

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

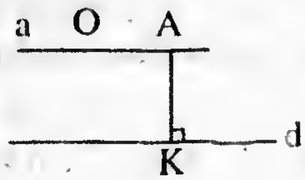


Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Trong mặt phẳng (O, d) hạ OH ⊥ d với H ∈ d.

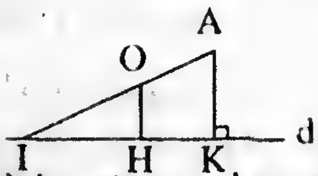
Bước 2: Thực hiện việc xác định độ dài OH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.

Chú ý:



1. Nếu tồn tại đường thẳng a qua O và song song với d thì:

$$d(O, d) = d(A, d), \text{ với } A \in d.$$



2. Nếu AO ∩ d = I thì:

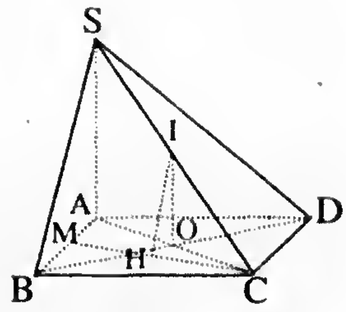
$$\frac{d(O,d)}{d(A,d)} = \frac{OI}{AI}$$

__Ví dụ 1:__ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a. Chứng minh rằng OI ⊥ (ABCD).

b. Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.

Giải



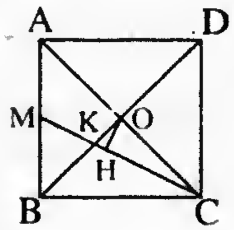
a. Trong ΔSAC, ta có:

OI là đường trung bình

$\Rightarrow OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên CM, ta có:

$$\begin{cases} CM \perp HI \\ CM \perp OI \end{cases} \Rightarrow CM \perp (IOH) \Rightarrow CM \perp OH.$$



Trong ΔABC có K là trọng tâm, ta có:

$$OB = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$OK = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Trong ΔOCK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2}/6)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}.$$

Trong ΔOIH vuông tại O, ta có:

$$IH^2 = OI^2 + OH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy, khoảng cách từ I tới CM bằng $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vì $SI \cap CM = C$ nên:

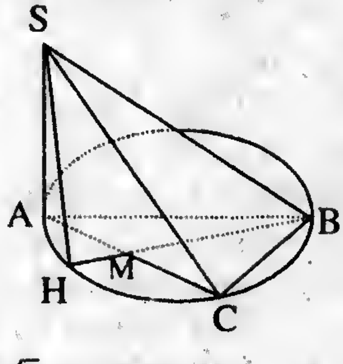
$$\frac{d(S,CM)}{d(I,CM)} = \frac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow d(S, CM) = 2d(I, CM) = 2IH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại C với AB = 2a, $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a. Chứng minh rằng $AH \perp BM$.

b. Đặt AM = x, với $0 \le x \le \sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Giải



a. Vì $SA \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của SH trên (ABC), do đó:

$AH \perp BM$, theo định lí ba đường vuông góc.

b. Ta thấy ngay khoảng cách từ S đến BM chính là SH và trong ΔSAH ta có:

$$SH^2 = SA^2 + AH^2. \quad (1)$$

Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC} = 30^0$ nên:

$$BC = \frac{AB}{2} = a \text{ và } AC = AB.\cos\widehat{BAC} = 2a.\cos30^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBCM vuông tại C, ta có:

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = BC^2 + (AC - AM)^2$$
$$= a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2 = x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2$$
$$\Leftrightarrow BM = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}.$$

Nhận xét rằng ΔAMH và ΔCMB là hai tam giác vuông có $\widehat{AMH} = \widehat{CMB}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AH = \frac{AM.BC}{BM} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}. \quad (2)$$

Thay (2) và SA = 2a vào (1), ta được:

$$SH^2 = 4a^2 + \frac{x^2a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2} = \frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}$$
$$\Leftrightarrow SH = \sqrt{\frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}.$$

Từ hệ thức (1) với SA = 2a không đổi, ta có nhận xét:

- SH đạt giá trị lớn nhất khi:
$$AH_{Max} \Leftrightarrow AM_{Max} \Leftrightarrow M \equiv C \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$
- SH đạt giá trị nhỏ nhất khi:
$$AH_{Min} \Leftrightarrow AM_{Min} \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow x = 0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông đường cao AB = a, BC = 2a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Ngoài ra còn có SC vuông góc với BD.

a. Chứng minh rằng ΔSBC vuông.
b. Tính độ dài AD.
c. Gọi M là một điểm trên đoạn SA, đặt AM = x, với $0 \le x \le a$. Tính khoảng cách từ D đến BM theo a và x. Tìm các giá trị của x để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là điểm di động trên đoạn CD, đặt CM = x. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên BM.

a. Tính độ dài đoạn SK theo a và x.
b. Tìm tập hợp các điểm K thoả mãn tính chất trên.

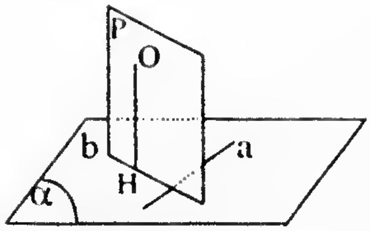
Bài tập 3: Cho ΔABC có BC = a, AC = b, AB = c. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại A lấy điểm S sao cho SA = d. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BC.

Bài tập 4: Cho mặt phẳng α và một điểm O ngoài α, A là một điểm cố định thuộc α sao cho OA không vuông góc với α, d là đường thẳng di động trong α nhưng luôn đi qua A. Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên d.

a. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn tính chất trên.
b. Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất.

Bài toán 2: Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Để tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Để dựng OH với H là hình chiếu vuông góc của O lên α, ta thực hiện:

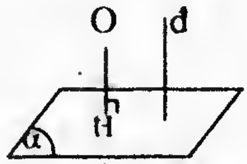
- Lấy đường thẳng a nằm trong α.
- Dựng mặt phẳng (P) qua O vuông góc với a cắt α theo giao tuyến b (cần chọn a sao cho mặt phẳng (P) dễ dựng).
- Trong (P), hạ OH ⊥ b tại H.

Bước 2: Dựng AH ⊥ c tại H., khi đó OH là khoảng cách từ O đến α.

Bước 3: Tính độ dài của đoạn OH là khoảng cách từ A đến α.

Chú ý:

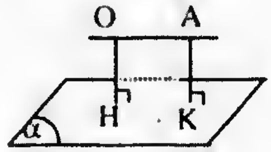
1. Trong bước 1, trước khi chọn a và dựng mặt phẳng (P) nên xét xem a và (P) đã có sẵn trên hình vẽ chưa. Nếu có, chúng ta sẽ giảm thiểu được phép dựng hình.
2. Nếu đã có sẵn đường thẳng d vuông góc với α thì chỉ cần dựng Ox // d ta được Ox ⊥ α.



3. Nếu OA // α thì:

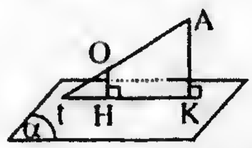
$$d(O, \alpha) = d(A, \alpha).$$

4. Nếu OA cắt α tại I thì:



$$\frac{d(O,\alpha)}{d(A,\alpha)} = \frac{OI}{AI}$$

5. Sử dụng tính chất của trục đường tròn, cụ thể:



***Định nghĩa**: Đường vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn gọi là trục của đường tròn đó.*

Ta có thể dùng tính chất của trục đường tròn để:

a. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

b. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cụ thể với trường hợp:

- Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và M là một điểm cách đều ba điểm A, B, C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó MO ⊥ (ABC) và MO = d(M, (ABC)).
- Nếu MA = MB = MC và NA = NB = NC trong đó A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục của đường tròn qua ba điểm A, B, C. Khi đó MN ⊥ (ABC) tại tâm O của đường tròn qua ba điểm A, B, C.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

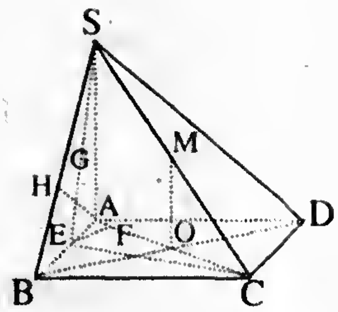
a. Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh SC và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Hãy dựng đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

d. Tính khoảng cách từ trọng tâm của ΔSAB đến (SAC).

Giải



a. Gọi M là trung điểm của SC.

Trong ΔSAC, ta có:

OM là đường trung bình

$\Rightarrow OM // SA \Rightarrow OM \perp (ABCD)$.

Vậy OM là đường thẳng cần dựng.

b. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$

Hạ AH vuông góc với SB, ta có ngay $AH \perp (SBC)$.

Vậy AH là đường thẳng cần dựng.

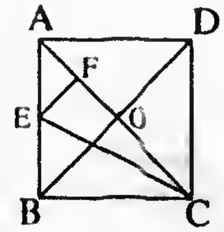
Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. Vì $AO \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

d. Gọi E là trung điểm AB, hạ $EF \perp AC$, ta được:



$$\begin{cases} EF \perp AC \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAC)$$

do đó EF chính là khoảng cách từ E tới (SAC).

Trong ΔOAB, ta có:

EF là đường trung bình $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, vì $EG \cap (SAC) = S$ nên:

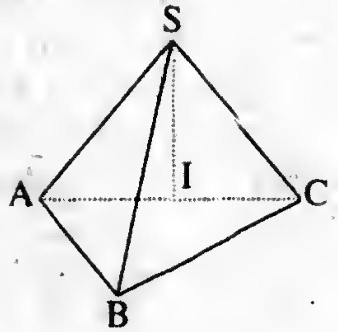
$$\frac{d(G,(SAC))}{d(E,(SAC))} = \frac{GS}{ES} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (SAC)) = \frac{2}{3}d(E, (SAC)) = \frac{2}{3}EF = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 120^0$ và $SA = SB = SC = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh AC.

a. Chứng minh rằng $SI \perp (ABC)$.

b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Giải



a. Trong ΔSAB vuông cân tại S, ta có:

$AB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}$..

Trong ΔSBC cân tại S có $\widehat{BSC} = 60^0$ nên là tam giác đều, suy ra $BC = a$.

Trong ΔSAC cân tại S, ta có:

$\widehat{SAC} = 30^0$,

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos ASC = 3a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Nhận xét rằng:

$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại B $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy với SA = SB = SC, ta được:

SI $\perp$ (ABC) và d(S, (ABC)) = SI.

b. Trong ΔSAI vuông tại I, ta có:

$$SI = SA.\sin\widehat{SAI} = SA.\sin\widehat{SAC} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$$

Vậy, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{a}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho mặt phẳng α. Một đường thẳng AB cắt α tại điểm O sao cho O là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng A và B cách đều α.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác cân đỉnh A, AB = a, $\widehat{BAC} = \alpha$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC). Tìm điều kiện của α để bài toán có nghĩa.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A với BC = 2a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biết $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

b. Tính khoảng cách từ S đến AB.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và AC = 2a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng (SAB) $\perp$ (SBC)

b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

c. Gọi O là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh rằng AI $\perp$ (SCD).

b. Tính khoảng cách từ trọng tâm ΔSBC đến mặt phẳng (ABCD).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của cạnh SC, CD

a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

b. Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD).

c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM).

Bài tập 7: Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh bằng a và AC = a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) với SH = a.

a. Hãy dựng đường thẳng qua H vuông góc với mặt phẳng (SCD) và tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Bài tập 8: Cho ΔABC cân đỉnh A có $\hat{A} = 120^0$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa tam giác sao cho SA = a. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC).

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tìm trên mặt phẳng (ABCD) một điểm cách đều ba điểm S, B, C và tính khoảng cách chung ấy và khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (SBC).

b. Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B, C, M với M là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách chung ấy.

Bài tập 10: Trong mặt phẳng α cho ΔABC vuông tại A có BC = 2a, $\widehat{ACB} = 60^0$. Dựng hai đoạn BB' = a, CC' = 2a cùng vuông góc với α và ở cùng một bên đối với α. Tính khoảng cách từ:

a. C' đến mặt phẳng (ABB').

b. Trung điểm của B'C đến mặt phẳng (ACC').

c. B' đến mặt phẳng (ABC').

d. Trung điểm của BC đến mặt phẳng (AB'C').

Bài toán 3:	Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng α, để tính khoảng cách giữa d và α ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Chọn một điểm A trên d, sao cho khoảng cách từ A đến α có thể được xác định dễ nhất.

   Bước 2: Kết luận $d(d, \alpha) = d(A, \alpha)$.

2. Cho hai mặt phẳng song song α và β, để tính khoảng cách giữa α và β ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Chọn một điểm A trên α, sao cho khoảng cách từ A đến β có thể được xác định dễ nhất.

   Bước 2: Kết luận $d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC.

a. Chứng minh rằng (MNP) // (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

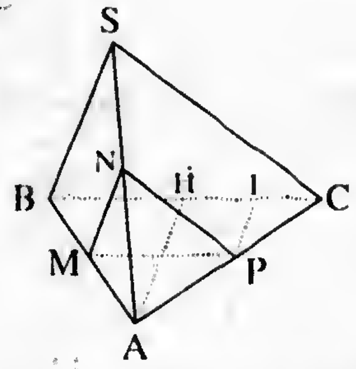
Giải

a. Vì M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC nên:

MN // SB, do MN là đường trung bình trong ΔSAB

MP // BC, do MP là đường trung bình trong ΔABC

suy ra (MNP) // (SBC).



b. Từ kết quả câu a), ta có:

$d((MNP), (SBC)) = d(P, (SBC))$.

Mặt khác ta lại có $AP \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(P,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{PC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(P, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)).$$

Hạ AH vuông góc với BC, ta có ngay $AH \perp (SBC)$. Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Vì ΔABC đều có cạnh bằng a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, suy ra:

$$d(P, (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

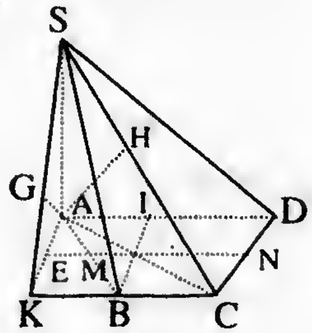
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.

a. Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Giải



a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC).$$

Hạ AH vuông góc với SC, ta có ngay $AH \perp (SCD)$.

Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SCD).

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm AD, suy ra:

$$BI \,//\, CD \Rightarrow BI \,//\, (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD)).$$

Mặt khác, ta lại có $AI \cap (SCD) = D$ nên:

$$\frac{d(I,(SCD))}{d(A,(SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I, (SCD)) = \frac{1}{2}d(A, (SCD)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$AD \,//\, CD \Rightarrow AD \,//\, (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)).$$

Hạ AK vuông góc với BC, ta được:

$$\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK) \text{ và } (SBC) \cap (SAK) = AK.$$

Hạ AG vuông góc với SK, ta có ngay $AG \perp (SBC)$.

Vậy AG là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Trong ΔSAK vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} AK \perp AD \\ AK \perp SA \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SAD).$$

Giả sử mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) cắt AK tại E, khi đó:

$$d(\alpha, (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK \Rightarrow \text{E là trung điểm của AK.}$$

Ta đi xác định thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α qua E và song song với (SAD), như sau:

$$\begin{cases} \alpha // (SAD) \\ \alpha \cap (ABCD) = Ex \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow Ex // AD$$

và Ex cắt AB, CD theo thứ tự tại M, N là trung điểm của mỗi đoạn.

Trong mặt phẳng (SAB) dựng My // SA và cắt SB tại Q là trung điểm của SB.

Trong mặt phẳng (SCD) dựng Nz // SD và cắt SC tại P là trung điểm của SC.

Vậy, thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng α là MNPQ, ngoài ra vì:

$MN // CD // PQ \Rightarrow$ MNPQ là hình thang

$MQ // SA \Rightarrow MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \perp MN \Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

trong đó:

$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{3a}{2}$, vì MN là đường trung bình của ABCD,

$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, vì PQ là đường trung bình của ΔSBC,

$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAB,

suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b, CC_1 = c.

a. Tính khoảng cách từ AA_1 đến mặt phẳng (BDD_1B_1).

b. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AA_1, BB_1. Tính khoảng cách từ MN đến mặt phẳng (ABC_1D_1).

c. Chứng minh rằng $(AB_1D_1) // (C_1BD)$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (C_1BD).

Bài tập 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có AA_1 = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, $AB = a\sqrt{3}$.

a. Tính khoảng cách từ AA_1 đến mặt phẳng (BCC_1B_1).

b. Tính khoảng cách từ A đến (A_1BC).

c. Chứng minh rằng AB vuông góc với mặt phẳng (ACC_1A_1) và tính khoảng cách từ A_1 đến mặt phẳng (ABC_1).

d. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BMN) và (A_1C_1P).

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = 2a và vuông góc với đáy.

a. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC), từ C đến (SBD).

b. M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

c. Mặt phẳng α qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách α một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng α và diện tích tứ giác BCFE.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a.

a. Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

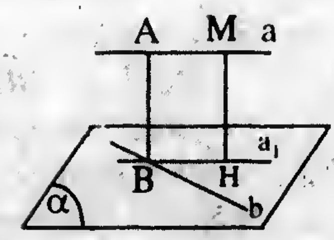
c. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a}{3}$.

Bài toán 4:	Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:



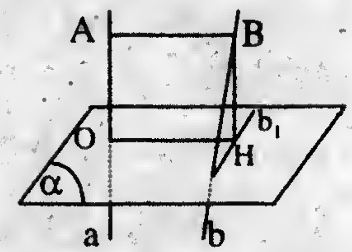
Bước 1: Dựng mặt phẳng α chứa b song song với a.

Bước 2: Chọn M trên a, dựng MH vuông góc với α tại H.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng a_1 song song với a, và cắt b tại B.

Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt α tại A. Đoạn AB là đoạn thẳng vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Dựng mặt phẳng α vuông góc với a và tại O.

Bước 2: Dựng hình chiếu vuông góc b_1 của b trên α. Dựng chiếu vuông góc H của O trên b_1.

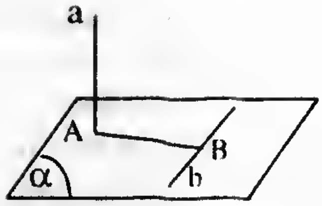
Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.

Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 3: (*Áp dụng cho trường hợp* a $\perp$ b): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: ựng mặt phẳng α chứa b, vuông c với a tại A.

Bước 2: Dựng AB ⊥ b tại B. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



2. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Tính độ dài đoạn vuông góc chung (nếu có).

Cách 2: Tính d(a, α) với α là mặt phẳng chứa b song song với a.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a. SB và AD.
b. SC và BD.
c. SB và CD.
d. SC và AD.
e. SB và AC.

Giải

a. Nhận xét rằng:

AD ⊥ AB, vì ABCD là hình vuông

AD ⊥ SA, vì SA vuông góc với (ABCD)

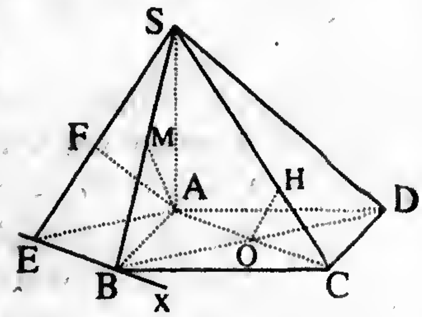
suy ra AD ⊥ (SAB).

Dựng AM vuông góc với SB thì AM là đoạn vuông góc chung của SB và AD.

Trong ΔSAB vuông cân tại A, ta có:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



b. Nhận xét rằng:

BD ⊥ AC, vì ABCD là hình vuông

BD ⊥ SA, vì SA vuông góc với (ABCD)

suy ra BD ⊥ (SAC).

Dựng OH vuông góc với SC thì OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Nhận xét rằng ΔHCO và ΔACS là hai tam giác vuông có chung góc nhọn $\hat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OH}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OH = \frac{SA.OC}{SC}$$

trong đó:

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{3}$$

suy ra:

$$OH = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c. Nhận xét rằng:

$CD // AB \Rightarrow CD // (SAB)$

$\Rightarrow d(CD, SB) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = DA = a.$

Vậy, khoảng cách giữa SB và CD bằng a.

d. Nhận xét rằng:

$AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$

$$\Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SC và AD bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e. Dựng:

$Bx // AC \Rightarrow AC // (S, Bx) \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (S, Bx))$

Hạ AE vuông góc với Bx, ta được:

$$\begin{cases} Bx \perp AE \\ Bx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (S, Bx) \Rightarrow (S, Bx) \perp (SAE) \text{ và } (S, Bx) \cap (SAE) = SE.$$

Hạ AF vuông góc với SE, ta có ngay $AE \perp (S, Bx)$.

Vậy AF là khoảng cách từ điểm A tới (S, Bx).

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$AE = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

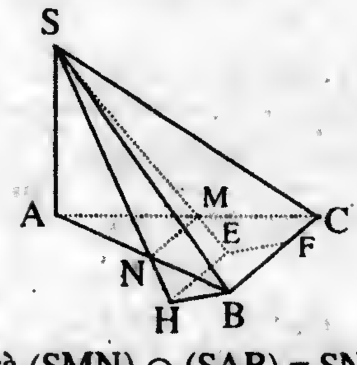
$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AB = a. Gọi M là trung điểm của AC.

a. Hãy dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC.



Giải

a. Để dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Gọi N là trung điểm AB, suy ra:

$BC // MN \Rightarrow BC // (SMN)$.

Ta có:

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB) \text{ và } (SMN) \cap (SAB) = SN.$$

Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Cách 2: Nhận xét rằng: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Do đó (SAB) chính là mặt phẳng qua B thuộc BC và vuông góc với BC.

Gọi N là trung điểm AB, suy ra:

$$MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

suy ra SN là hình chiếu vuông góc của SM trên (SAB).

Hạ $BH \perp SN$ suy ra $BH \perp (SMN)$.

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Nhận xét rằng ΔSAN và ΔBHN là hai tam giác vuông có hai góc nhọn đối đỉnh nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{BH}{SA} = \frac{BN}{SN} \Rightarrow BH = \frac{SA.BN}{SN}$$

trong đó:

$$BN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

$$SN^2 = SA^2 + AN^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17a^2}{4} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

suy ra:

$$BH = \frac{2a.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{17}}{2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

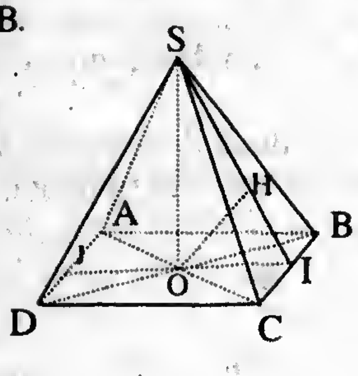
Vậy, khoảng cách giữa SM và BC bằng $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

<u>**Ví dụ 3:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$ và có đường cao SO = a.

a. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB.

Giải



a. Hạ OI vuông góc với BC và kéo dài OI cắt AD tại J.

Ta có:

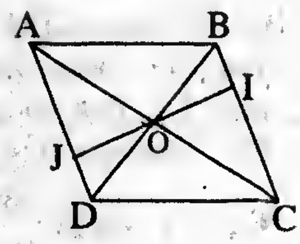
$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$$

$$\Rightarrow (SBC) \perp (SOI) \text{ và } (SBC) \cap (SOI) = SI$$

Hạ OH vuông góc với SI, ta có ngay $OH \perp (SBC)$.

Vậy OH là khoảng cách từ điểm O tới (SBC).

Với hình thoi ABCD, ta có:



$$BD = a, \text{ vì } \Delta ABD \text{ đều} \Rightarrow OB = \frac{a}{2}$$

$$AC = 2AO = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{(a/2)^2}+\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}=\frac{13}{3a^2}\Rightarrow OI=\frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{39}/13)^2}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách từ O đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. Nhận xét rằng:

$AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

$\Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(J, (SBC))$.

Mặt khác, ta lại có $JO \cap (SBC) = I$ nên:

$$\frac{d(J,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\frac{JI}{OI}=2\Rightarrow d(J,(SBC))=2d(O,(SBC))=2OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

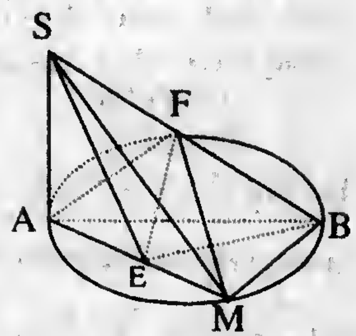
Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

__Ví dụ 4:__ Cho đường tròn đường kính $AB = 2R$ chứa trong mặt phẳng α, SA vuông góc với mặt phẳng α và $SA = h$, với $0 < h < 2R$. Gọi M là một điểm di động trên đường tròn. Xác định vị trí của M để đoạn nối trung điểm hai đoạn AM và SB là đoạn thẳng vuông góc chung của chúng, khi đó tính độ dài của đoạn vuông góc chung này.

Giải

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AM và SB.

Nhận xét rằng dựa trên tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông, ta có:



$$AF=\frac{1}{2}SB \text{ và } MF=\frac{1}{2}SB=\frac{\sqrt{h^2+4R^2}}{2}$$

$\Rightarrow MF = AF \Leftrightarrow \Delta AFM$ cân tại F

$\Rightarrow EF \perp AM$.

Như vậy, để EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB điều kiện là:

$EF \perp SB \Leftrightarrow \Delta ESB$ cân tại E

$\Leftrightarrow SE = BE.$ (1)

Đặt $AE = x$, suy ra $ME = x$.

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$SE^2 = SA^2 + AE^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow SE = \sqrt{h^2+x^2}$. (2)

Trong ΔEMB vuông tại M, ta có:

$BE^2 = BM^2 + ME^2 = (AB^2 - AM^2)^2 + ME^2$

$= 4R^2 - 4x^2 + x^2 = 4R^2 - 3x^2$

$\Rightarrow BE = \sqrt{4R^2 - 3x^2}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\sqrt{h^2+x^2}=\sqrt{4R^2-3x^2}\Leftrightarrow h^2+x^2=4R^2-3x^2$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2} \Rightarrow AM = 2x = \sqrt{4R^2 - h^2}$.

Trong ΔMEF vuông tại E, ta có:

$$EF^2 = MF^2 - ME^2 = \frac{h^2 + 4R^2}{4} - \frac{4R^2 - h^2}{4} = \frac{h^2}{2} \Rightarrow EF = \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, với điểm M thuộc đường tròn sao cho $AM = \sqrt{4R^2 - h^2}$ thì EF là đoạn thẳng vuông góc chung của AM và SB, và khi đó $EF = \dfrac{h\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hai tam giác cân ABC và ABD có đáy chung AB và không cùng nằm trên một mặt phẳng.

a. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

b. Xác định rõ đoạn thẳng vuông góc chung của AB và CD.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, AD vuông góc với BC, AD = a và khoảng cách từ D đến BC là a. Gọi H là trung điểm của BC, I là trung điểm của AH.

a. Chứng minh rằng $BC \perp (ADH)$ và DH = a.

b. Chứng minh rằng $DI \perp (ABC)$.

c. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AD và BC.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABC có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB = a. Gọi M là trung điểm của AB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Bài tập 4: Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. OA và BC.

b. AI và OC.

Bài tập 5: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $IS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. AB và SD.

b. SA và BD.

c. NP và AC.

d. MN và AP.

Bài tập 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều và $AA_1 = h$. Biết khoảng cách giữa A_1B_1 và BC_1 là d. Tính cạnh đáy của lăng trụ theo d và h.

Bài tập 7: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, C_1D_1. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. A_1B và B_1C.

b. DE và AB_1.
c. A_1B và B_1C_1.
d. DE và A_1F.

Bài tập 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi O, O_1 theo thứ tự là trung điểm của AB và A_1B_1.

a. Chứng minh rằng $AB \perp (COO_1)$.
b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và B_1C.

Bài tập 9: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ACD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ΔABC vuông tại A, ΔACD vuông tại D.

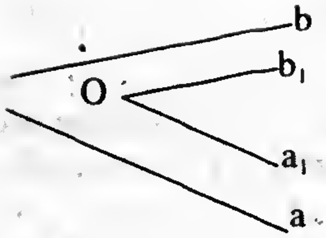
a. Chứng minh rằng các tam giác ABD và BCD đều vuông.
b. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Tìm điều kiện để IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Bài tập 10: Cho tứ diện ABCD có bốn mặt là bốn tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ diện cũng là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đó.

CHỦ ĐỀ 5
GÓC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. NHẮC LẠI GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG



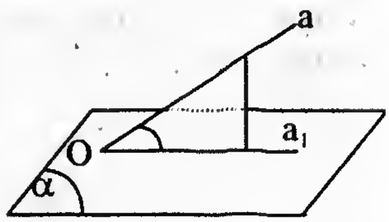
Định nghĩa: *Góc giữa hai đường thẳng bất kì a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với hai đường thẳng đó*, kí hiệu là $(\widehat{a,b})$ hay $(\widehat{b,a})$.

Đặc biệt:

- Khi a và b trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(\widehat{a,b}) = 0^0$.
- Khi a và b vuông góc thì $(\widehat{a,b}) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (\widehat{a,b}) \le 90^0$.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



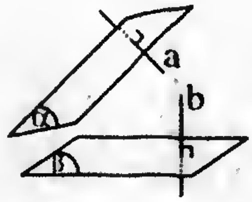
Định nghĩa: *Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng α là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a_1 của nó trên α*, kí hiệu là $(\widehat{a,\alpha})$ hay $(\widehat{\alpha,a})$.

Đặc biệt:

- Khi a thuộc α hoặc a song song với α thì $(\widehat{a,b}) = 0^0$.
- Khi a vuông góc với α thì $(\widehat{a,\alpha}) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (\widehat{a,\alpha}) \le 90^0$.

3. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



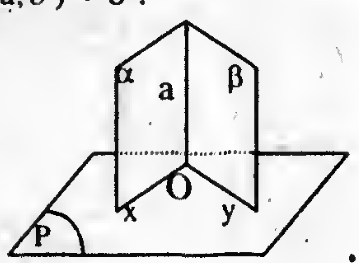
Định nghĩa: *Góc giữa hai mặt phẳng α và β là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó*, kí hiệu là $(\widehat{\beta,\alpha})$ hay $(\widehat{\alpha,\beta})$.

Đặc biệt:

- Khi α và β trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(\widehat{a,b}) = 0^0$.
- Khi α vuông góc với β thì $(\widehat{\alpha,\beta}) = 90^0$.

như vậy, ta luôn có $0 \le (\widehat{\alpha,\beta}) \le 90^0$.

4. NHỊ DIỆN

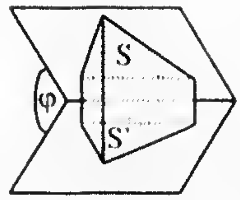


Định nghĩa: *Hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng α và β có chung bờ a được gọi là nhị diện*, kí hiệu là [α, a, β] hoặc [α, β].

Cắt nhị diện [α, a, β] bởi mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm O và cắt α, β theo thứ tự là các nửa đường thẳng Ox và Oy. Khi đó, góc xOy được gọi là *góc phẳng của nhị diện* [α, a, β], kí hiệu Sđ[α, β] hoặc viết tắt [α, β].

Đặc biệt, khi α vuông góc với β thì $[\alpha, \beta] = 90^0$, ta nói [α, β] là *nhị diện vuông*. Như vậy, ta luôn có $0 \le [\alpha, \beta] \le 180^0$.

5. DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT TAM GIÁC



Định lí: *Nếu một tam giác có diện tích S thì hình chiếu của nó có diện tích S' bằng tích của S với cosin của góc φ giữa mặt phẳng của tam giác và mặt chiếu.*

Tức là:

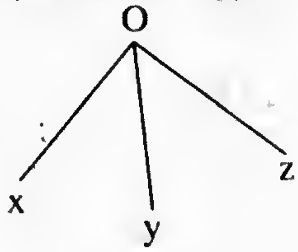
$$S' = S.\cos\varphi.$$

Hệ quả: *Nếu S là diện tích của một đa giác phẳng, S' là diện tích của đa giác chiếu và φ là góc giữa mặt phẳng của đa giác và mặt phẳng chiếu thì ta có:*

$$S' = S.\cos\varphi.$$

6. TAM DIỆN

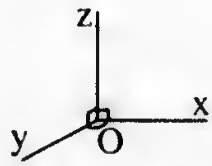
Định nghĩa: *Hình hợp bởi ba tia* Ox, Oy, Oz *không đồng phẳng được gọi là một tam diện*, kí hiệu là Oxyz.



Trong đó:

- Các tia Ox, Oy, Oz gọi là các *cạnh* của tam diện.
- Các miền góc xOy, yOz, zOx được gọi là các *mặt* của tam diện.
- Độ lớn của các góc xOy, yOz, zOx gọi là *góc phẳng ở đỉnh* của tam diện.

Một tam diện gọi là *tam diện vuông* nếu ba góc phẳng ở đỉnh của nó đều là góc vuông.



II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

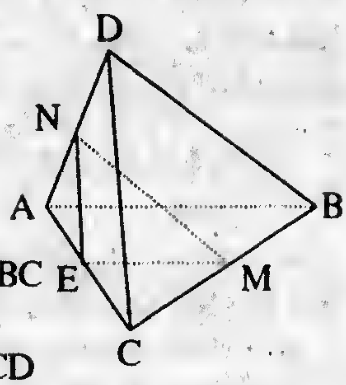
Bài toán 1: Góc giữa hai đường thẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã thu nhận được phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng trong chủ đề 1.

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{2}$.

Giải



Gọi E là trung điểm AC, ta có:

$$\begin{cases} EM \,//\, AB \\ EN \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = \widehat{MEN}.$$

Trong ΔMEN, ta có:

$$ME = \frac{1}{2}AB = a, \text{vì ME là đường trung bình trong } \Delta ABC$$

$$NE = \frac{1}{2}CD = a, \text{vì NE là đường trung bình trong } \Delta ACD$$

suy ra:

$$ME^2 + NE^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 = MN^2 \Leftrightarrow \Delta MEN \text{ vuông tại E} \Leftrightarrow \widehat{MEN} = 90^0.$$

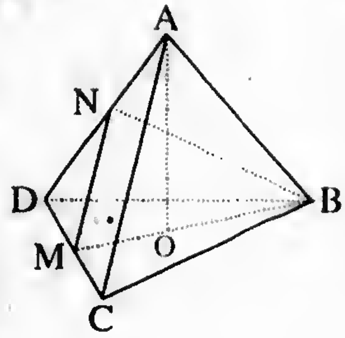
Vậy, góc giữa AB và CD bằng 90^0.

Ví dụ 2: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

a. Chứng minh rằng $AO \perp CD$.

b. Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc giữa AC và BM.

Giải



a. Ta có ngay kết luận $AO \perp CD$ vì A.BCD là hình chóp tam giác đều.

b. Gọi N là trung điểm AD, ta có:

$$MN // AC \Rightarrow (\widehat{AC, BM}) = \widehat{BMN}.$$

Xét ΔBMN, ta có:

$BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, vì BM là trung tuyến trong ΔABC đều

$BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, vì BN là trung tuyến trong ΔABD đều

$MN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2}$, vì MN là đường trung bình trong ΔACD

$$\cos\widehat{BMN} = \frac{MB^2 + MN^2 - BN^2}{2MB.MN} = \frac{MN}{2MB} = \frac{\frac{a}{2}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy, ta được $\cos(\widehat{AC, BM}) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, C_1D_1. Hãy tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a. AB_1 và BC_1, AC_1 và CD_1.

b. MN và C_1D_1, BD và AD_1, MN và AP, A_1P và DN.

Bài tập 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b và $AA_1 = c$.

a. Hãy tính góc giữa AD_1 và B_1C.

b. Hãy tính góc giữa AB và A_1C.

Bài tập 3: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD. Hãy tính cosin của góc giữa AC và DO.

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD.

a. Hãy tính cosin của góc giữa AB và DM, biết ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

b. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{3}$.

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD, có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = b

a. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó, tính độ dài của chúng.

b. Hãy tính góc hợp bởi các cạnh đối của tứ diện .

Bài tập 6: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, SAB là tam giác vuông cân tại A, M là điểm trên cạnh AD (M khác A và D). Mặt phẳng α qua M song song với mặt phẳng (SAB) cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

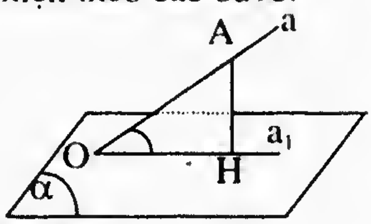
a. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang vuông.

b. Đặt AM = x, với $0 < x < 2a$. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

Bài toán 2: Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng α, ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao điểm O của a với α.

Bước 2: Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp \alpha$, với $H \in \alpha$.

Khi đó $\widehat{AOH} = (\widehat{a,\alpha})$

Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng giác.

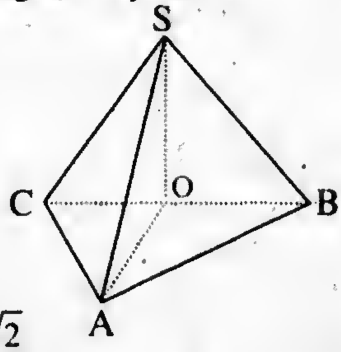
Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại A, BC = a, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC).

b. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Giải

a. Gọi O là trung điểm của BC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ngoài ra, theo giả thiết ta có SA = SB = SC nên SO là trục đường tròn của ba ΔABC, suy ra:

$SO \perp (ABC)$ và $SO = d(S, (ABC))$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có:

$OA = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Vì $SO \perp (ABC)$ nên OA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC), do đó:

$(\widehat{SA,(ABC)}, (\widehat{ABC})) = SAO$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có:

$$\cos\widehat{SAO} = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, ta được $\cos(\widehat{SA,(ABC)}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và (ABCD) bằng 60^0.

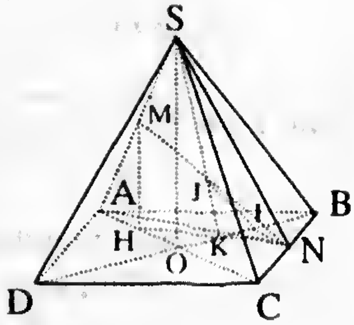
a. Tính MN và SO.

b. Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SBD).

Giải

a. Gọi H là trung điểm OA, suy ra:

$MH // SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$



suy ra NH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABCD), do đó:

$$(\widehat{MN,(ABCD)}) = \widehat{MNH} = 60^0.$$

Trong ΔHNC, ta có:

$$NH^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos\widehat{NCH}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos45^0 = \frac{10a^2}{16}$$

$$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Trong ΔHMN vuông tại H, ta có:

$$MN = \frac{NH}{\cos\widehat{MNH}} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$MH = NH.\text{tg}\,\widehat{MNH} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.\text{tg}60^0 = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Trong ΔOSA, ta có MH là đường trung bình nên:

$$SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

b. Giả sử:

$$AN \cap BD = K \Rightarrow (SAN) \cap (SBD) = SK$$

Giả sử:

$$MN \cap SK = J \Rightarrow MN \cap (SBD) = J.$$

Gọi I là trung điểm OB, ta có:

$$NI // OC \Rightarrow \begin{cases} NI \perp BD \\ NI \perp SO \end{cases} \Rightarrow NI \perp (SBD)$$

suy ra IJ là hình chiếu vuông góc của MN trên (SBD), do đó:

$$(\widehat{MN,(SBD)}) = \widehat{NIJ}.$$

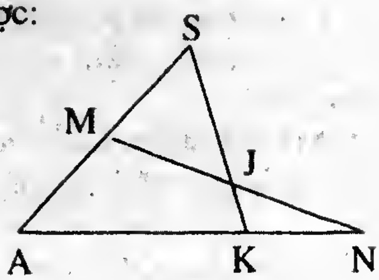
Trong ΔOBC có NI là đường trung bình nên:

$$NI = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Trong ΔABC có trung tuyến AN và BO nên K là trọng tâm, suy ra:

$$\frac{KA}{KN} = 2.$$

Dựa vào hình bên, theo định lí Mêlêlaus, ta được:



$$\frac{KA}{KN}.\frac{JN}{JM}.\frac{SM}{SA} = 1 \Leftrightarrow 2.\frac{JN}{JM}.\frac{1}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{JN}{JM} = 1 \Leftrightarrow JN = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Trong ΔNIJ vuông tại I, ta có:

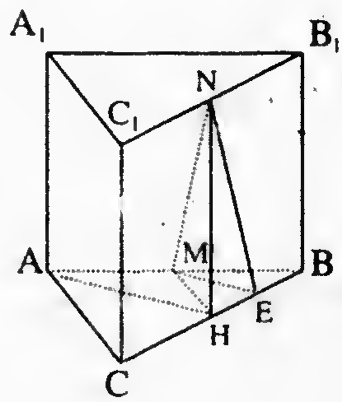
$$\sin\widehat{NIJ} = \frac{NI}{JN} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy, ta được $\sin(\widehat{MN,(SBD)}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân tại A. Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B_1C_1 có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên (BCC_1B_1) góc β.

a. Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b. Chứng minh rằng $\cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta$.



Giải

a. Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$NH \,//\, BB_1 \Rightarrow NH \perp (ABC)$

suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABC), do đó:

$(\widehat{MN,(ABC)}) = \widehat{NMH} = \alpha$.

Ngoài ra:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC_1B_1).$$

Gọi E là trung điểm BH, suy ra:

$ME \,//\, AH \Rightarrow ME \perp (BCC_1B_1)$

suy ra NE là hình chiếu vuông góc của MN trên (BCC_1B_1), do đó:

$(\widehat{MN,(BCC_1B_1)}) = \widehat{MNE} = \beta$.

Trong ΔMNH vuông tại H, ta có:

$MH = MN.\cos\widehat{NMH} = a.\cos\alpha$.

$NH = MN.\sin\widehat{NMH} = a.\sin\alpha \Rightarrow AA_1 = a.\sin\alpha$.

Trong ΔABC cân tại A, vì MH là đường trung bình nên:

$AB = AC = 2MH = 2a.\cos\alpha$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}\,a.\cos\alpha$.

$AH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}\,a.\cos\alpha$.

b. Trong ΔMNE vuông tại E, ta có:

$$\sin\beta = \frac{ME}{MN} = \frac{\frac{1}{2}AH}{MN} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a.\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC).

b. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh AB = a nằm trong một mặt phẳng α, cạnh $AC = a\sqrt{2}$ và tạo với α một góc 60^0. Tính góc giữa BC và α.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

a. Tính góc giữa SB và CD.

b. Tính góc giữa SC và (ABCD).

c. Tính góc giữa các cặp SC và (SAB), SB và (SAC), AC và (SBC).

Bài tập 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết rằng BC_1 hợp với (ABB_1A_1) góc 30^0.

a. Tính AA_1.

b. Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến mặt phẳng (BA_1C_1).

c. Gọi N là trung điểm của cạnh BB_1. Tính góc giữa MN và (BA_1C_1).

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Mặt phẳng α qua BC, hợp với AC góc 30^0, cắt SA, SD lần lượt tại M, N Tính diện tích thiết diện BCNM.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cạnh SC có độ dài bằng a, hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β.

a. Tính SA.

b. Chứng minh rằng $AB = a\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$.

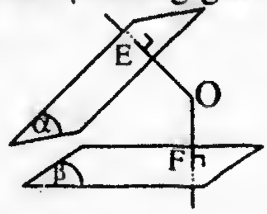
Bài toán 3: Góc giữa hai mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính góc giữa hai mặt phẳng α và β, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn điểm O, từ đó hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với α và β.

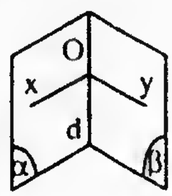


Bước 2: Tính số đo của góc $\widehat{EOF}$.

Bước 3: Khi đó:

- $(\widehat{\alpha,\beta}) = \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} \le 90^0$.
- $(\widehat{\alpha,\beta}) = 180^0 - \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} > 90^0$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao tuyến d của α và β.

Bước 2: Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong α dựng $Ox \perp d$.

- Trong β dựng Oy ⊥ d.

Bước 3: Tính số đo của góc $\widehat{xOy}$.

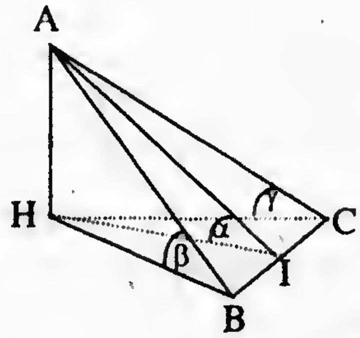
Bước 4: Khi đó:

- $(\widehat{\alpha,\beta}) = \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} \le 90^0$.
- $(\widehat{\alpha,\beta}) = 180^0 - \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} > 90^0$.

Ví dụ 1: Cho ΔABC vuông tại A có cạnh huyền BC thuộc mặt phẳng (P). Gọi β, γ là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC với (P). Gọi α là góc hợp bởi (ABC) với (P). Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Giải



Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng (P), ta được:

$\widehat{ABH} = \beta$ và $\widehat{ACH}$ ACH $= \gamma$.

Kẻ HI vuông góc với mặt phẳng BC, suy ra:

BC ⊥ AI, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{AIH} = \alpha$.

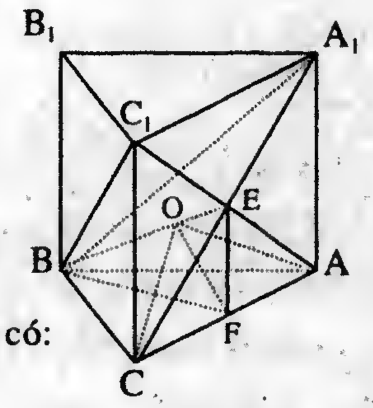
Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{IA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{AH^2}{IA^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

Giải



Gọi E là tâm hình vuông (ACC_1A_1), suy ra:

$(ABC_1) \cap (BCA_1) = BE$

Trong (EBC), hạ CO ⊥ BE, O ∈ BE, ta có:

$$\begin{cases} BE \perp CO \\ BE \perp AC \end{cases} \Rightarrow BE \perp (OAC) \Rightarrow BE \perp OA.$$

Vậy, ta nhận được góc $\widehat{AOC}$ AOC.

Gọi F là trung điểm AC, trong ΔBEF vuông tại F, ta có:

$EF = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{a}{2}$, vì nó là đường trung bình

$BF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, trung tuyến trong một tam giác đều

$$\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{EF^2} + \frac{1}{BF^2} = \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong ΔOFA vuông tại F, ta có:

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7a^2}{16} \Rightarrow OA = OC = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Trong ΔOAC, ta có:

$$\cos\widehat{AOC} = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA.OC} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 - a^2}{2\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2} = -\frac{1}{7} \Rightarrow \widehat{AOC} \text{ tù.}$$

Vậy, ta được:

$$(\widehat{(ABC_1),(BCA_1)}) = 180^0 - \widehat{AOC}$$

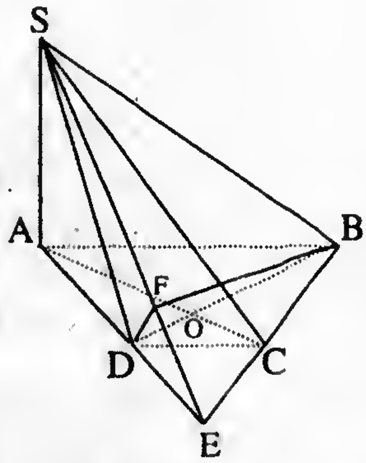
$$\Rightarrow \cos(\widehat{(ABC_1),(BCA_1)}) = \cos(180^0 - \widehat{AOC}) = -\cos\widehat{AOC} = \frac{1}{7}.$$

__Ví dụ 3:__ Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải



a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (Dựng góc dựa trên giao tuyến): Giả sử:

$AD \cap BC = E \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SE.$

Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

suy ra:

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SE.$

Hạ $DF \perp SE$ tại F, suy ra:

$(BDF) \perp SE$

Như vậy, ta được một góc phẳng giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\widehat{BFD}$.

Vì ΔABE đều nên $AE = AB = 2a$.

Vì ΔCDE đều nên $DE = CD = a$.

Trong ΔSAE vuông tại S, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2 \Rightarrow SE = a\sqrt{7}.$$

Hai tam giác vuông SAE và DFE có chung góc $\hat{E}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{DF}{SA} = \frac{DE}{SE} \Rightarrow DF = \frac{SA.DE}{SE} = \frac{a\sqrt{3}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$BD = AB.\sin\widehat{BAD} = 2a.\cos60^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBDF vuông tại D, ta có:

$$\text{tg}\,\widehat{BFD} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \sqrt{7} \Rightarrow \text{BFD nhọn.}$$

Vậy, ta được $\text{tg}(\widehat{(SAD),(SBC)}) = \sqrt{7}$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

suy ra $BD \perp (SAD)$. (1)

Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết

suy ra:

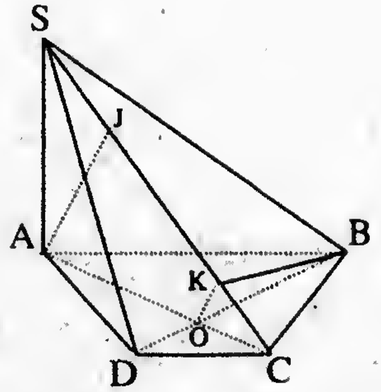
$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC)$. (2)

Trong (SAC) hạ $OK \perp SC$ tại K, suy ra $OK \parallel AJ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$(\widehat{(SAD),(SBC)}) = (\widehat{BD,AJ}) = (\widehat{BD,OK}) = \widehat{KOB}.$$

Trong nửa lục giác đều ABCD, ta có:



$$OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại S, ta có:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + (AB^2 - BC^2)$$

$$= \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (4a^2 - a^2) = 6a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{6}.$$

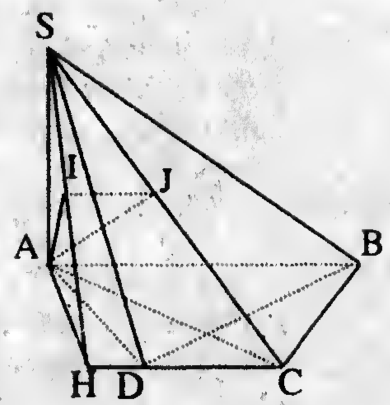
Hai tam giác vuông SAC và OKC có chung góc nhọn $\widehat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong ΔKOB vuông tại K, ta có:

$$\cos\widehat{KOB} = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy, ta được $\cos(\widehat{(SAD),(SBC)}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



b. Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết

suy ra:

$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC)$. (4)

Hạ $AH \perp CD$ tại H, suy ra:

$$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH)$$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAH)$ và $(SCD) \perp (SAH) = SH$.

Hạ $AI \perp SH$ tại I, suy ra $AI \perp (SCD)$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra

$$(\widehat{(SCD),(SBC)}) = \widehat{IAJ}.$$

Trong ΔSAH vuông tại A, ta có:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$AC = SA = a\sqrt{3} \Rightarrow AJ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Trong ΔAIJ vuông tại I, ta có:

$$\cos\widehat{IAJ} = \frac{AI}{AJ} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{5}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy, ta được $\cos(\widehat{(SCD),(SBC)}) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a. SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCM) và (ABC).

b. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCM).

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông đỉnh B, AB = 2a, $BC = a\sqrt{3}$. SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

b. Tính khoảng cách từ A tới đường thẳng CM.

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCM) và (ABC).

d. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCM).

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $\hat{A} = 60^0$.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABCD) và độ dài SC.

b. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (ABCD)$ và $SB \perp BC$.

c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

Bài tập 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và hình chiếu vuông góc H của A lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ trùng với trung điểm của cạnh B_1C_1.

a. Tính khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ.
b. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AC_1.
c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABB_1A_1) và (ABC).

Bài tập 5: Trong mặt phẳng a cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R. Trên đường thẳng vuông góc tại O với α lấy điểm S sao cho OS = R. Gọi M, N là hai điểm trên (C) sao cho $\widehat{MON} = 90^0$, a và b là hai tiếp tuyến với (C) tại M và N. Tính góc giữa hai mặt phẳng (S, a) và (S, b).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt (SAC) hợp với mặt (SAB) một góc α và hợp với mặt (SBC) một góc β. Dựng các đường cao AH, AK của ΔSAC và ΔSAB.

a. Chứng minh rằng $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{AHK} = \beta$.
b. Chứng minh rằng $SA = \dfrac{a\cos\beta}{\sqrt{\cos[\pi-(\alpha+\beta)].\cos(\alpha-\beta)}}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Hai mặt bên SAB và SCD vuông tại A và C, cùng hợp với đáy góc α. Biết $\widehat{ABC}$ ABC = φ.

a. Chứng minh SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).
b. Chứng minh (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc β thoả hệ thức cotgβ = cotgα.cosφ.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABC vuông tại B, AB = a, BAC = α, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi β là góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

a. Chứng minh rằng $tg\alpha.tg\beta = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.
b. ΔABC phải thoả thêm điều kiện gì để β = 60^0.

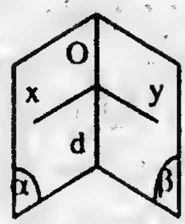
Bài toán 4: Góc nhị diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta đã biết được phương pháp giải bài toán về góc giữa hai mặt phẳng với hai cách xác định góc trung gian để tính (vì góc giữa hai mặt phẳng chỉ nhận giá trị từ 0^0 đến 90^0). Tuy nhiên, đối với bài toán về số đo của góc nhị diện thông thường chúng ta cần xác định được góc phẳng, do vậy cần thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định cạnh của nhị diện và góc phẳng nhị diện.

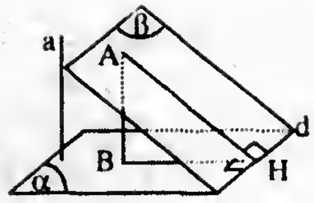
Bước 2: Tính số đo của góc phẳng nhị diện dựa trên các hệ thức lượng giác trong tam giác.



Chú ý: Để thực hiện được bước 1 chúng ta thường sử dụng một trong ba kết quả sau:

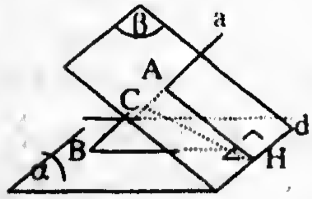
1. Nếu có đường thẳng a ⊥ α thì lựa chọn một điểm A thuộc β rồi:

- Dựng Ax // a và cắt β tại B.
- Hạ AH (hoặc BH) vuông góc với d tại H.



Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.

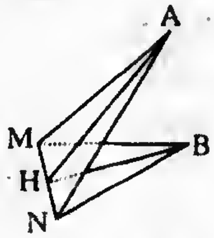
2. Nếu có một đường thẳng a cắt hai mặt của nhị diện tại A, B và vuông góc với cạnh d của nhị diện thì ta có thể dựng góc phẳng của nhị diện đó như sau:



- Hạ AH (hoặc BH hoặc CH với C là điểm bất kì trên a) vuông góc với d tại H.

Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.

3. Nếu hai mặt của nhị diện lần lượt chứa hai tam giác cân AMN và BMN có chung đáy MN thì:



- Gọi H là trung điểm MN, suy ra:

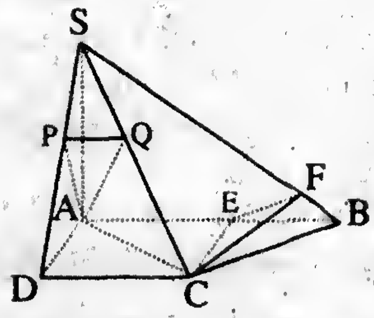
$$HA \perp MN \text{ và } HB \perp MN$$

Ta được $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính số đo nhị diện (S, BC, A).
b. Tính số đo nhị diện (A, SB, C).
c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải



a. Ta có ngay:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp SC \in (S,BC \\ BC \perp AC \in (A,BC) \end{cases}$$

suy ra $\widehat{SCA}$ là góc phẳng nhị diện (S, BC, A).

Gọi E là trung điểm AB, suy ra AE = BE = a và CE = a.

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$AC = a\sqrt{2}$, vì AC là đường chéo của hình vuông ADCE

$\Rightarrow AC = SA \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A $\Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$.

Vậy, số đo nhị diện (S, BC, A) bằng 45^0.

b. Ta có:

$$\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB).$$

Hạ CF ⊥ SB tại F, suy ra:

EF ⊥ SB, theo định lí ba đường vuông góc

Do đó, góc $\widehat{CFE}$ là góc phẳng nhị diện (A, SB, C).

Hai tam giác vuông SAB và EFB có chung góc nhọn $\widehat{B}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{EF}{SA}=\frac{EB}{SB}\Rightarrow EF=\frac{SA.EB}{SB}=\frac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2+(2a)^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔCEF vuông tại E, ta có:

$$\text{tg}\widehat{CFE}=\frac{CE}{EF}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{CFE}=60^0.$$

Vậy, số đo nhị diện (A, SB, C) bằng 60^0.

c. Hạ $AP\perp SD$ tại P, suy ra:

$$\begin{cases}AP\perp SD\\ AP\perp CD\end{cases}\Rightarrow AP\perp (SCD). \quad (1)$$

Hạ $AQ\perp SC$ tại Q, suy ra:

$$\begin{cases}AQ\perp SC\\ AQ\perp BC\end{cases}\Rightarrow AQ\perp (SBC). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(\widehat{(SCD),(SBC)})=\widehat{PAQ}$.

Trong ΔSAD vuông tại A, ta có:

$$SD^2=SA^2+AD^2=(a\sqrt{2})^2+a^2=3a^2\Rightarrow SD=a\sqrt{3},$$

$$\frac{1}{AP^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$SA=AC=a\sqrt{2}\Rightarrow AQ=\frac{SC\sqrt{2}}{2}=a.$$

Trong ΔAPQ vuông tại P, ta có:

$$\cos\widehat{PAQ}=\frac{AP}{AQ}=\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy, ta được $\cos(\widehat{(SBC),(SCD)})=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

__Ví dụ 2:__ Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính số đo nhị diện (B, SC, D).

Giải

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

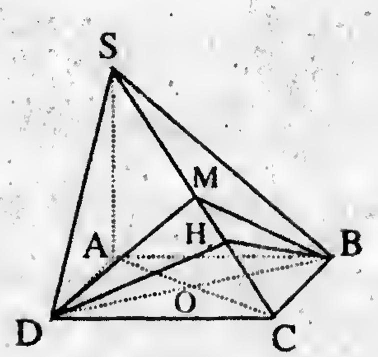
$AC=a\sqrt{2}\Rightarrow SC=2a.$

Gọi M là trung điểm của SC, suy ra:

$BM=\frac{1}{2}SC=a$, vì ΔSBC vuông tại B

$\Rightarrow \Delta BMC$ cân tại B

$DM=\frac{1}{2}SC=a$, vì ΔSDC vuông tại D



$\Rightarrow \Delta DMC$ cân tại D

Gọi H là trung điểm CM, suy ra $\widehat{BHD}$ là góc phẳng nhị diện (B, SC, D).

Trong ΔBHD, ta có:

$$BD = a\sqrt{2},$$

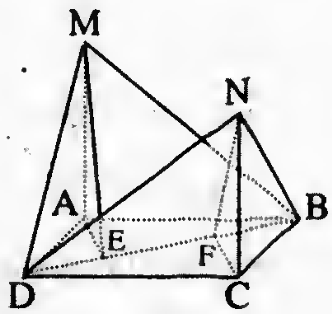
$$HD = HB = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{SC}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\widehat{BHD} = \frac{HB^2 + HD^2 - BD^2}{2HB.HD} = \frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, nhị diện (B, SC, D) có $\cos(\widehat{B,SC,D}) = -\frac{1}{3}$.

__Ví dụ 3:__ Cho hình chữ nhật ABCD có AB = a, AD = b. Trên hai tia Ax, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt AM = x, CN = y. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, BD, N) có số đo bằng 60^0 là:

$$\frac{(x+y)ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}\left(xy - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right).$$



Giải

Ta dựng:

- AE vuông góc với BD tại E
- CF vuông góc với BD tại F

suy ra $\widehat{AEM}$ và $\widehat{CFN}$ theo thứ tự là góc nhị diện của (A, BD, M) và (C, BD, N).

Ta có:

(A, BD, M) + (M, BD, N) + (C, BD, N) = (A, BD, C) = 180^0

Vậy, điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, BD, N) có số đo bằng 60^0 là:

$$(A, BD, M) + (C, BD, N) = 120^0 \Leftrightarrow \widehat{AEM} + \widehat{CFN} = 120^0$$

$$\Leftrightarrow tg(\widehat{AEM} + \widehat{CFN}) = tg120^0 \Leftrightarrow \frac{tg\widehat{AEM} + tg\widehat{CFN}}{1 - tg\widehat{AEM}.tg\widehat{CFN}} = -\sqrt{3}. \quad (1)$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow AE = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = CF.$$

Trong ΔAEM vuông tại A, ta có:

$$tg\,\widehat{AEM} = \frac{AM}{AE} = \frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \quad (2)$$

Trong $\Delta ACFN$ vuông tại A, ta có:

$$\operatorname{tg}\widehat{CFN} = \frac{CN}{CF} = \frac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{\dfrac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab} + \dfrac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}}{1 - \dfrac{x\sqrt{a^2+b^2}}{ab}.\dfrac{y\sqrt{a^2+b^2}}{ab}} = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow ab\sqrt{a^2+b^2}\,(x+y) = \sqrt{3}\,[xy(a^2+b^2) - a^2b^2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}\left(xy - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right).$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông cân với AB = AC = a, DBC là tam giác đều, nhị diện cạnh BC có số đo bằng 30^0.

a. Tính AD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).
b. Tính số đo của các nhị diện cạnh BD và AD.

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân với AB = BC = a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC.

a. Tính số đo của nhị diện (A, SC, B).
b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính số đo nhị diện (B, SC, D).

Bài tập 4: Cho hình vuông ABCD cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính số đo của các nhị diện sau:

a. (S, BC, A).
b. (S, BD, A).
c. (SAB, SCD).

Bài tập 5: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng HS vuông góc với mặt phẳng (ABCD) sao cho nhị diện cạnh AD của hình chóp S.ABCD có số đo bằng 60^0. Gọi K là trung điểm của cạnh AD.

a. Tính SH và khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).
b. Tính số đo nhị diện (A, SD, C).
c. Tính số đo nhị diện (B, SC, K).

Bài tập 6: Cho chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a, tâm O, $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng $\widehat{ASC}$ vuông
b. Chứng minh (B, SA, D) là nhị diện vuông.
c. Tính số đo của nhị diện (S, BC, A).

Bài tập 7: Từ điểm M ngoài mặt phẳng α ta hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB, MC tới mặt phẳng α. Biết MA = a và MB, MC đều tạo với mặt phẳng α các góc 30^0, MB và MC vuông góc với nhau.

a. Tính độ dài đoạn BC.

b. Tính số đo của nhị diện (M, BC, A).

Bài tập 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC vuông cân đỉnh A, BC = 2a. Cho biết nhị diện (A, B_1C_1, B) có số đo bằng α.

a. Chứng minh rằng $AA_1 = \dfrac{2a\cos\alpha}{\sqrt{-\cos 2\alpha}}$

b. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên B_1C và A_1C. Chứng minh rằng $\widehat{AHK}$ là góc phẳng của nhị diện (A, B_1C, A_1) và $\widehat{AHK} = \pi - 2\alpha$.

Bài toán 5: Phép chiếu vuông góc và ứng dụng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Từ công thức diện tích hình chiếu:

$$S' = S.\cos\varphi,$$

nếu biết hai trong ba đại lượng S, S', φ ta tính được đại lượng còn lại. Đặc biệt dựa vào công thức này ta có thể tính góc giữa hai mặt phẳng mà không cần dựng góc phẳng.

2. Từ định lí hình chiếu của một góc vuông:

" Hình chiếu vuông góc của một góc vuông là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song với mặt chiếu hay nằm trong mặt chiếu "

ta có thể chứng minh được đường thẳng vuông góc với đường thẳng hay đường thẳng song song với mặt phẳng.

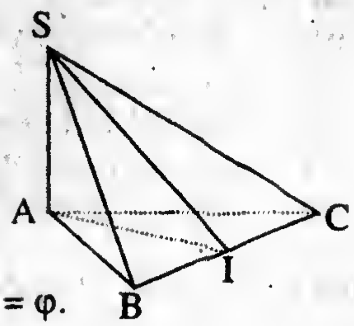
Chú ý: Cần lưu ý đến hai tính chất sau của phép chiếu vuông góc:

1. Nếu đoạn thẳng A_1B_1 là hình chiếu vuông góc của đoạn AB trên mặt phẳng α thì $A_1B_1 \le AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AB // \alpha$ hay $AB \subset \alpha$.
2. Phép chiếu vuông góc bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = 2a, $SC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 90^0$.

a. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b. Tính diện tích ΔABC.



Giải

a. Hạ $SI \perp BC$ tại I, suy ra:

$AI \perp BC$, định lí ba đường vuông góc.

Suy ra, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SIA} = \varphi$.

Trong ΔSBC vuông tại S, ta có:

$$\frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong ΔSAI vuông tại A, ta có:

$$\sin\varphi = \frac{SA}{SI} = \frac{a}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^0.$$

b. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi = \frac{1}{2}SB.SC.\cos 60^0 = \frac{1}{2}.2a.a\sqrt{2}.\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho ΔABC có đỉnh A nằm trong mặt phẳng α, hai đỉnh B, C có hình chiếu trên α lần lượt là B_1 và C_1 sao cho ΔAB_1C_1 là tam giác đều cạnh a. Giả sử $CC_1 = a$ và $BB_1 = \frac{a}{2}$. Gọi I là giao điểm của BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng $IA \perp AC$.
b. Tính diện tích ΔABC rồi suy ra giá trị của góc φ giữa hai mặt phẳng α và (ABC).

Giải

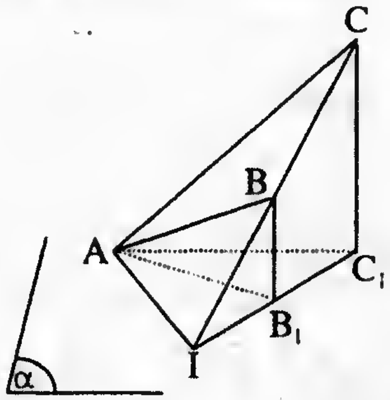
a. Từ giả thiết $CC_1 = 2BB_1$, suy ra B, B_1 theo thứ tự là trung điểm của IC và IC_1.

Trong ΔAIC_1, ta có:

$B_1A = B_1C_1 = B_1I \Rightarrow \Delta AIC_1$ vuông tại A

Vậy, ta có:

$$\begin{cases} IA \perp AC_1 \\ IA \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow IA \perp (ACC_1) \Rightarrow IA \perp AC.$$



b. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}S_{\Delta AIC} = \frac{1}{4}AC.AI \qquad (1)$$

trong đó:

$$AC^2 = C_1C^2 + C_1A^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2} \qquad (2)$$

$$AI^2 = C_1I^2 - C_1A^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AI = a\sqrt{3} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}.a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có:

$S_{\Delta AB_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, vì ΔAB_1C_1 là tam giác đều cạnh a

$$S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta ABC}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta AB_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

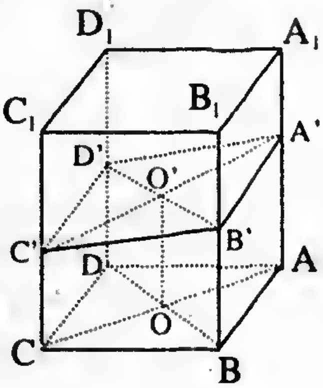
Ví dụ 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng α cắt AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt tại A', B', C', D'. Đặt AA' = a, BB' = b, CC' = c, DD' = d. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành và a + c = b + d.
b. Điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình thoi là a = c hay b = d.

c. Nếu a = b thì A'B'C'D' là hình chữ nhật. Mệnh đề đảo có đúng không ?

Giải

a. Nhận xét rằng:



$$\begin{cases}(ABB_1A_1)//(CDD_1C_1)\\ \alpha\cap(ABB_1A_1)=A'B'\\ \alpha\cap(CDD_1C_1)=C'D'\end{cases}\Rightarrow A'B'//C'D'.$$

$$\begin{cases}(BCC_1B_1)//(ADD_1A_1)\\ \alpha\cap(BCC_1B_1)=B'C'\\ \alpha\cap(ADD_1A_1)=A'D'\end{cases}\Rightarrow A'D'//B'C'.$$

suy ra, tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

Giả sử $AC\cap BD = O$ và $A'C'\cap B'D' = O'$, ta có:

$$OO' = \frac{1}{2}(AA' + CC'),$$ vì OO' là đường trung bình của hình thang ACC'A'

$$OO' = \frac{1}{2}(BB' + DD'),$$ vì OO' là đường trung bình của hình thang BDD'B'

suy ra:

$$\frac{1}{2}(AA' + CC') = \frac{1}{2}(BB' + DD') \Leftrightarrow a + c = b + d,$$ đpcm.

b. Nhận xét rằng hình chiếu vuông góc của góc $\widehat{A'OB'}$ lên (ABCD) là $\widehat{AOB}$.

Để A'B'C'D' là hình thoi điều kiện cần và đủ là:

$$\widehat{A'OB'} = 90^0 \Leftrightarrow \begin{cases}O'A'//OA\\ O'B'//OB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A'C'//AC\\ B'D'//BD\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AA'=CC'\\ BB'=DD'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=c\\ b=d\end{cases}.$$

c. Nếu a = b, ta được:

$$AA' = BB' \Rightarrow A'B' // AB \Rightarrow \widehat{A'B'C'} = 90^0 \Rightarrow$$ A'B'C'D' là hình chữ nhật.

Thấy ngay, đảo lại không đúng vì với vai trò b, d như nhau nên A'B'C'D' cũng sẽ là hình chữ nhật khi a = d.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC cân tại đỉnh A và α là mặt phẳng chứa đường cao AH. Gọi B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B và C lên α. Chứng minh rằng ΔAB_1C_1 cân.

Bài tập 2: Cho ΔABC vuông tại B, AB = 2a, BC = a. Trên hai nửa đường thẳng Bx và Cy vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ở cùng một phía đối với (ABC) lấy các điểm B_1 và C_1 sao cho $BB_1 = a$, $CC_1 = x$. Tính theo a và x độ dài các đoạn AB_1, B_1C_1 và AC_1. Từ đó suy ra giá trị của x sao cho góc $\widehat{AB_1C_1} = 90^0$.

Bài tập 3: Cho hình thoi ABCD có đỉnh A ở trong mặt phẳng α, các đỉnh khác không ở trong α, BD = a, $AC = a\sqrt{2}$. Chiếu vuông góc hình thoi lên mặt phẳng α ta được hình vuông AB'C'D'.

a. Tính diện tích của ABCD và AB'C'D'. Suy ra góc giữa (ABCD) và α.

b. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của CB, CD với mặt phẳng α. Tính diện tích của tứ giác EFDB và EFD'B'.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = a. Tính diện tích thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng α trong mỗi trường hợp sau:

a. α qua SB và hợp với (SAB) góc 45^0.

b. α qua AC và hợp với (ABCD) góc 30^0.

Bài tập 5: Cho ΔABC cân tại A, đường cao $AH = a\sqrt{3}$, đáy BC = 3a; BC chứa trong mặt phẳng α. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên α. Khi tam giác A'BC vuông tại A', tính góc giữa α và (ABC).

Bài tập 6: Cho ΔABC đều, cạnh a chứa trong mặt phẳng α. Trên các đường thẳng vuông góc với α vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với α.

a. Chứng minh rằng ΔADE vuông. Tính diện tích của tam giác này.

b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và α.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABC có các mặt bên hợp với đáy một góc φ.

a. Chứng minh hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b. Chứng minh rằng $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi}$.

Bài tập 8: Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a, AA' vuông góc với mặt phẳng (ABC) và AA' = h. Một mặt phẳng α cắt ba cạnh bên của lăng trụ. Tính diện tích của thiết diện của lăng trụ với α trong các trường hợp sau:

a. Góc giữa α và (ABC) bằng 60^0.

b. α vuông góc với BC'.

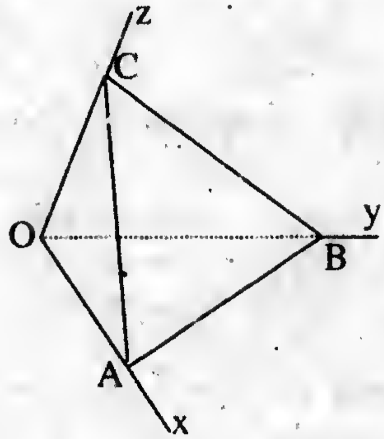
Bài toán 6: Tam diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của tam diện để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của tam diện cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết cho tứ diện.

Ví dụ 1: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và $\widehat{xOy} = 90^0$, $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = 60^0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (xOz) và (yOz).

Giải



Trên Oz lấy điểm C sao cho OC = 1.

Trong (xOz) dựng Ct $\perp$ Oz và cắt Ox tại A.

Trong (yOz) dựng Cm $\perp$ Oz và cắt Oy tại B.

Khi đó, ta được một góc phẳng là $\widehat{ACB}$ ACB.

Trong ΔABC, ta có:

$AC = BC = OC.tg60^0 = \sqrt{3}$,

$$AB = OA\sqrt{2} = 2OC\sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

$$\cos\widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{2(\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2(\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{ACB} \text{ tù.}$$

Vậy, ta được:

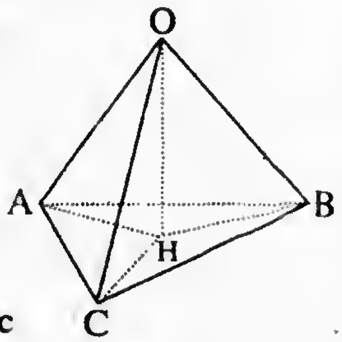
$$(\widehat{(xOz),(yOz)}) = 180^0 - \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{(xOz),(yOz)}) = \cos(180^0 - \widehat{ACB}) = -\cos\widehat{ACB} = \frac{1}{3}.$$

__Ví dụ 2:__ Cho tứ diện OABC có ba mặt OAB, OAC, OBC là những tam giác vuông tại đỉnh O. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OAB), (OAC), (OBC). Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Giải



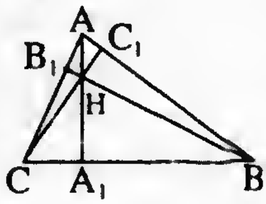
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC).

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$$

Mặt khác, vì:

$$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow (OHA) \perp BC$$
$$\Rightarrow HA \perp BC.$$

Chứng minh tương tự, ta có $HB \perp AC$, do đó H là trực tâm ΔABC.



Đặt OA = a, OB = b, OC = c và giả sử

$$AH \cap BC = A_1,\ BH \cap AC = B_1,\ CH \cap AB = C_1$$

suy ra $OA_1A = \alpha$, $OB_1B = \beta$, $OC_1C = \gamma$.

Trong ΔAOA_1 vuông tại O, ta có:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{OA_1A} = \cos(90^0 - \widehat{OA_1A}) = \sin\widehat{OAA_1} = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{a}.$$

Tương tự, ta cũng có $\cos\beta = \frac{OH}{b}$ và $\cos\gamma = \frac{OH}{c}$.

Trong các ΔAOA_1 và ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OA_1^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OH^2}{a^2} + \frac{OH^2}{b^2} + \frac{OH^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \text{ đpcm.}$$

__Ví dụ 3:__ Cho tam diện Sxyz có Sx, Sy, Sz đôi một vuông góc. Lấy các điểm A, B, C trên Sx, Sy, Sz. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

a. Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$.
b. Chứng minh rằng $(S_{SBC})^2 = S_{ABC} . S_{HBC}$, Từ đó suy ra:

$$(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2.$$

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC. \qquad (1)$$

Mặt khác, vì H là trực tâm của ΔABC nên:

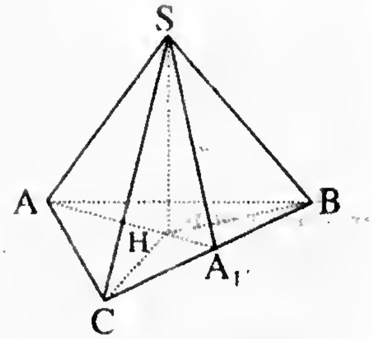
$AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$. (3)

Chứng minh tương tự, ta được $AB \perp SH$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SH \perp (ABC)$.



b. Trong ΔSAA_1 vuông tại S, ta có:

$$SA_1^2 = AA_1.HA_1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}SA_1^2.BC^2 = \frac{1}{4}AA_1.HA_1.BC^2$$

$\Leftrightarrow (S_{SBC})^2 = S_{ABC} \,.\, S_{HBC}$, đpcm.

Chứng minh tương tự, ta có:

$(S_{SAB})^2 = S_{ABC} \,.\, S_{HAB}$ và $(S_{SCA})^2 = S_{ABC} \,.\, S_{HCA}$.

Khi đó:

$$(S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2 = S_{ABC} \,.\, S_{HAB} + S_{ABC} \,.\, S_{HBC} + S_{ABC} \,.\, S_{HCA}$$
$$= (S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}).S_{ABC} = (S_{ABC})^2, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho $\widehat{xOy} = \widehat{xOz} = \alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ và $\widehat{yOz} = \beta$. Gọi γ là góc giữa Ox và mặt phẳng (yOz). Chứng minh rằng $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD có ba mặt ABC, ACD, ADB là những tam giác vuông tại đỉnh A, M là một điểm ở trong ΔBCD. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa AM và các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB). Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

Bài tập 3: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng sao cho $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$; M là một điểm trên Oz. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) nằm trên đường phân giác của góc xOy.

Bài tập 4: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trên một mặt phẳng và $\widehat{xOy} = \alpha$; $\widehat{xOz} = \beta \ (0 < \alpha, \beta < 90^0)$, $\widehat{yOz} = \gamma$. Lấy A trên Ox với OA = 1. Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với Ox cắt Oy, Oz lần lượt tại B và C.

a. Tính các cạnh của tam giác ABC theo α, β, γ.

b. Suy ra điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (xOy) và (xOz) vuông góc với nhau là $\cos\gamma = \cos\alpha.\cos\beta$.

Bài tập 5: Cho tứ diện OABC có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (OAB) và (OAC) vuông góc với nhau là ΔABC có $tgB.tgC = 2$.

Bài tập 6: Cho ba tia không đồng phẳng Ox, Oy, Oz đôi một hợp với nhau góc 60^0 A là một điểm cố định trên Oz với OA = a.

a. Chứng minh hình chiếu vuông góc của Oz trên mặt phẳng (Oxy) là đường phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy). Tính AA' theo a.

c. M, N là hai điểm lần lượt trên Ox, Oy. Giả sử M cố định, N di động trên Oy. Tìm tập hợp hình chiếu của A trên MN.

d. Đặt OM = x, ON = y. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác AMN vuông tại A là $a(x + y) - xy = 2a^2$.

Bài tập 7: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và vuông góc với nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B; C sao cho AC = 2OB và BC = 2OA. Đặt a = OA.

a. Tính OB, OC theo a.

b. Gọi M và N là chân các đường vuông góc kẻ từ O lần lượt đến AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.

c. Tính $\cos\widehat{MON}$.

d. Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1.$$

Bài tập 8: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng, đôi một hợp với nhau góc 60^0. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy ba điểm A, B, C. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (yOz). Đặt OA = a, OB = x, OC = y.

a. Tính các góc $\widehat{BOH}$, $\widehat{COH}$ và độ dài các đoạn OH, AH.

b. Tìm hệ thức giữa a, x, y để $\widehat{BAC} = 90^0$.

c. Giả sử $\widehat{BAC} = 90^0$. Tính y theo a và x. Tìm điều kiện của x để y tồn tại.

d. Chứng minh nếu đường thẳng BC qua H thì ta có hệ thức $3xy = a(x+y)$.

e. Tính x, y theo a, cho biết $\widehat{BAC} = 90^0$ và H thuộc đường thẳng BC.

Bài tập 9: Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC và đôi một vuông góc với nhau OA = OB = OC = a. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và AC, E là điểm đối xứng của O qua K.

a. Chứng minh ΔBCE và ΔOME là những tam giác vuông và mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (OCK).

b. Gọi I là giao điểm của CE với mặt phẳng (OMN). Chứng minh mặt phẳng (OMN) vuông góc với CE và MN vuông góc với OI. Tính diện tích tứ giác OMIN.

c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OB và CE.

d. F là một điểm di động trên cạnh OA, CH là đường cao của tam giác BCF. Tìm tập hợp điểm H.

Bài tập 10: Hình chóp O.ABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) các góc α, β, γ.

a. Chứng minh hệ thức $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

b. H là trực tâm tam giác ABC. Các cạnh OA, OB, OC hợp với OH các góc α', β', γ'. Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = \sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = 2$$

Đẳng thức trên còn đúng nữa không nếu H là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng (ABC).

c. Đặt $S = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA}$ và h là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC). Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{S}{h^2}$.

Bài tập 11: Cho tứ diện SABC có ba góc ở đỉnh S đều vuông. Đặt a = SA, b = SB, c = SC. Gọi H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm của ΔABC.

a. Tính SH, SG theo a, b, c.

b. Chứng minh rằng ΔABC có ba góc nhọn và $a^2 tgA = b^2 tgB = c^2 tgC$.

c. Chứng minh rằng $S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} > \frac{9}{2} SH^2$.

d. Giả sử b + c = a. Chứng minh rằng $\widehat{SAB} + \widehat{SAC} + \widehat{BAC} = 90^0$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của S trên AB và CD.

a. Chứng minh mặt phẳng (SIJ) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Biết hai mặt SAB và SAD cùng hợp với đáy góc α, còn SC hợp với đáy góc β. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

Bài tập 2: Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60^0, nhận BA = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax.

a. Tính AD và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABD).

b. Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b. Tính số đo nhị diện (A, SD, C).

c. Gọi BE, DF là hai đường cao của tam giác SBD. Chứng minh rằng mặt phẳng (ACF) vuông góc với mặt phẳng (SBC); mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.

a. Chứng minh rằng SI vuông góc với mặt phẳng (ABCD); AD vuông góc với mặt phẳng (SAB).

b. Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAD).

c. Tính góc giữa SD và mặt phẳng (SCI).

Bài tập 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC); S là một điểm di động trên (P) sao cho S.ABCD là hình chóp có hai mặt bên (SAB), (SAC) hợp với đáy (ABC) hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Gọi H; I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.

a. Chứng minh rằng $SH^2 = HI.\ HJ$.

b. Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = SB = SC, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) là h. Tính theo a để hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N là hai điểm lần lượt ở trên hai cạnh BC, DC sao cho $BM = \frac{a}{2}; DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD); M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y.

a. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa x, y.

b. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để nhị diện (M, SA, N) có số đo bằng 30^0 là $a(x+y)+\sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

Bài tập 9: Cho hình bình hành ABCD có khoảng cách từ A đến BD bằng h. Trên hai tia Ax, Cy cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD0 và cùng chiều, ta lần lượt lấy hai điểm M, N. Đặt x = AM, y = CN. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc là $xy = h^2$.

Bài tập 10: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC. Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; I là trung điểm của AB, K là giao điểm của OI với BC.

a. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau là $\widehat{ISK} = 90^0$.

b. Biết bán kính của đường tròn (ABC) là R, SO = 2R, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau là tam giác ABC có ba góc nhọn và $tg\alpha.tg\beta = \frac{5}{4}$.

Bài tập 11: Cho tam giác ABC vuông tại C. Trên đường thẳng (Δ) vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác tại A ta lấy một điểm S. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC.

a. Chứng minh các mặt của tứ diện S.ABC đều là tam giác vuông.

b. Tìm tập hợp các điểm D và E khi S di động trên (Δ).

c. Chứng minh rằng AE vuông góc với mặt phẳng (SBC); DE vuông góc với SB và AE.

d. Chứng minh đường thẳng DE qua một điểm cố định khi S di động trên (Δ).

Bài tập 12: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A ta lấy một điểm M. Gọi h và O lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và MBC.

a. Chứng minh OH vuông góc với mặt phẳng (BMC).

b. Tìm tập hợp điểm O khi M di động trên d.

c. Đường thẳng OH cắt d tại N. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh vuông góc

d. Chứng minh AM.AN không đổi. Tính AM, AN để độ dài MN nhỏ nhất.

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABCD đáy là nửa lục giác đều ABCD với BC = 2a, AB = AD = CD = a. Mặt bên SBC là tam giác đều. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Cho biết SD vuông góc với AC.

a. Tính SD.

b. α là mặt phẳng qua M trên cạnh BD và song song với SD và AC. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng α. Phân biệt 2 trường hợp.

c. Tính diện tích của thiết diện theo a và x với $BM = x\sqrt{3}$. Định x để diện tích ấy lớn nhất.

Bài tập 14: Cho tứ diện ABCD có AB = 2a, tam giác BCD vuông tại C có BD = 2a, BC = a. Gọi E là trung điểm của BD. Cho biết $(\widehat{AB, CE}) = 60^0$.

a. Tính $2AC^2 - AD^2$ theo a.

b. là một mặt phẳng song song với AB và CE, cắt các cạnh BC, BD, AE, AC theo thứ tự tại M, N, P, Q. Tính diện tích tứ giác MNPQ theo a và x = BM, với $0 < x < a$. Định x để diện tích ấy lớn nhất.
c. Định x để tổng bình phương của các đường chéo của MNPQ là nhỏ nhất.
d. Gọi O là giao điểm của MP và NQ. Định α để $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ nhỏ nhất.

Bài tập 15: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C). Vẽ SA = 2R và SA vuông góc với α. Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của tam giác SAB, và SAM.
a. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAM) vuông góc với mặt phẳng (SBM).
b. Chứng minh tứ giác BHMK nội tiếp được và giao điểm T của HK và BM ở trên một đường thẳng cố định.
c. Đặt góc $\widehat{BAM} = \varphi$, với $0 < \varphi < 90^0$. Tìm giá trị của φ để diện tích tam giác AHK lớn nhất.

Bài tập 16: Cho hình vuông ABCD nằm trong mặt phẳng α. Vẽ tia Ax vuông góc với α, M là một điểm trên Ax. Đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (MBC) cắt α tại R, đường thẳng qua M và vuông góc với (MCD) cắt α tại S.
a. Chứng minh: A, B, R thẳng hàng và A, D, S thẳng hàng.
b. Tìm tập hợp trung điểm I của RS khi M di động trên tia Ax
c. Gọi AH là đường cao của tam giác AMI. Chứng minh AH vuông góc với mặt phẳng (MRS) và H là trực tâm của tam giác MRS .

Bài tập 17: Cho tam giác BCD vuông tại B có CD = a, $\widehat{BCD} = \alpha$; BA vuông góc với mặt phẳng (BCD) và BA = a.
a. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) theo a và α.
b. Gọi I là trung điểm của CD. Xác định α để mặt phẳng (ABI) là mặt phẳng trung trực của CD.
c. Giả sử C, D cố định, B di động trên đường tròn đường kính CD. Chứng minh rằng $AC^2 + AD^2$ không đổi.

Bài tập 18: Cho tam giác đều ABC có chiều cao AH = 3a. Lấy điểm O trên đoạn AH sao cho AO = a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O lấy điểm S sao cho OS = BC.
a. Chứng minh BC vuông góc với SA và tính SO, SA, SH theo a.
b. Tính số đo nhị diện (B, SA, C)
c. Qua điểm I trên đoạn OH, dựng mặt phẳng α vuông góc với OH, α cắt các đoạn AB, SB, SC lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng MNPQ là hình thang cân.
d. Tính diện tích MNPQ theo a và x = AI. Xác định x để diện tích này có giá trị lớn nhất.

Bài tập 19: Cho trong mặt phẳng (P) đường tròn (C) đường kính AB = 2R. Trên tia Ax vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho $\widehat{SBA} = 30^0$; m là điểm trên (C). Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$.
a. Tính tổng các bình phương các cạnh của tứ diện S.ABM theo R và α.
b. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và AM theo R và α.
c. Qua A vẽ mặt phẳng vuông góc với SB tại H, cắt SM tại N. Tìm tập hợp các điểm N khi M di động trên (C).
d. Gọi β là số đo góc phẳng nhị diện cạnh SB. Chứng minh rằng $tg\alpha \cdot tg\beta = 2$.

Bài tập 20: Cho tứ diện S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = 2a, AC = 3a. SB vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = $a\sqrt{3}$.

a. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC, đặt x = MC. Gọi H và K lần lượt là các hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (ABC) và (ASB). Mặt phẳng (MHK) cắt AB tại L. Chứng minh rằng KMHL là hình chữ nhật. Với giá trị nào của x thì KMHL là hình vuông ?

b. Tính theo a và x độ dài đường chéo ML của hình chữ nhật KMHL. Với giá trị nào của x thì ML có độ dài nhỏ nhất ? Ứng với giá trị nào của x hãy nêu lên đặc tính hình học của đoạn ML.

Bài tập 21: Cho hình thang vuông ABCD có đáy lớn AD = 2a, đáy nhỏ BC = a, và AB =a. SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M là là một điểm trên đường chéo AC, đặt AM = x. Mặt phẳng α qua M và vuông góc với AC. Tuỳ theo vị trí của M trên đoạn AC hãy xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với α. Tính diện tích của thiết diện này theo a và x. Xác định x để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Bài tập 22: Trong mặt phẳng α cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R; AB là một dây cung di động của (C); I là trung điểm của AB. Trên đường thẳng vuông góc với α tại O lấy điểm S.

a. Chứng minh mặt phẳng (SOI) vuông góc với mặt phẳng (SAB).

b. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SAB) khi AB di động nhưng luôn luôn cùng phương với một đường thẳng cố định.

c. Đặt AB = 2x ($0 \leq R$), SO = h. Tính x để diện tích tam giác lớn nhất.

Bài tập 23: Cho hình chóp S.ABC là tam giác vuông tại A với AB = a và BC = 2a. Điểm H ở trên cạnh AC sao cho CH = $\frac{1}{3}$CA, SH là đường cao của hình chóp và SH = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và SA. Tìm thiết diện và tính diện tích thiết diện của hình chóp đã cho với các mặt phẳng:

a. Qua H và vuông góc với AI.

b. Qua BJ và vuông góc với mặt phẳng (SHI).

c. Qua I và vuông góc với BC.

Bài tập 24: Tứ diện ABCD có DA = $a\sqrt{2}$, các cạnh khác đều bằng a; DH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H.

a. Chứng minh rằng ABH và ACH là những tam giác vuông bằng nhau và các mặt phẳng (DBC) và (ADH) vuông góc với nhau

b. Tính số đo nhị diện cạnh AD.

c. Mặt phẳng qua H và vuông góc với AD cắt AD, BD và CD lần lượt tại A', B', C'. Tính AH, DH, DB' và chứng minh rằng tứ giác HB'A'C' là hình vuông.

Bài tập 25: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SA = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, AC = 2a. Các đỉnh S, A, C cố định; đỉnh B di động sao cho nhị diện

cạnh SB luôn là nhị diện vuông; AD và AE lần lượt là đường cao của tam giác SAC và SAB.

a. Chứng minh tam giác ABC và SBC vuông và AE vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b. Tính góc $\widehat{BAC}$ để khoảng cách từ E đến mặt phẳng (SAC) lớn nhất.

c. Giả sử DE cắt BC tại M và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (SBC) tại D cắt mặt phẳng (ABC) tại N. Chứng tỏ A, M, N thẳng hàng và tích AM, AN không đổi. Định góc BAC để MN có độ dài nhỏ nhất.

Bài tập 26: Cho mặt phẳng α, một điểm A ở trong mặt phẳng α và một điểm B ở ngoài mặt phẳng α sao cho các khoảng cách từ A và B đến Δ bằng nhau. Gọi M và N là hình chiếu vuông góc của A và B trên Δ.

a. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên α. Chứng minh rằng trong α đường trung trực của MN qua một điểm F cố định.

b. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các điểm I khi Δ di động.

c. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (B, Δ). Chứng minh rằng AQ có độ dài không đổi.

Bài tập 27: Hình chóp S.ABCD có đáy hìn vuông cạnh a. Các nhị diện cạnh AB, BC, CD, AD, có số đo lần lượt là α, β, γ, β. Gọi h là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

a. Tính SH theo a và β.

b. Cho $\gamma = 4\alpha$. Tính tỉ số $\dfrac{a}{SH}$ theo α.

c. Tính α, β, γ cho biết $\gamma = 2\beta = 4\alpha$.

Bài tập 28: Trong mặt phẳng α cho đoạn thẳng AB = 2a và một đường thẳng y'By vuông góc với AB tại B. Trên đường thẳng x'Ax vuông góc với α tại A, ta lấy đoạn AC = x và trên y'By ta lấy BD = y.

a. Các mặt nào của tứ diện ABCD là tam giác vuông?

b. Tính CD. Tìm hệ thức giữa x và y để CD = x + y.

c. Giả sử hệ thức đó được thỏa, tính tổng các bình phương các diện tích các mặt của tứ điện ABCD theo a và x + y. Suy ra giá trị của x và y để tổng đó nhỏ nhất.

Bài tập 29: Trong mặt phẳng α cho hình thoi ABCD cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Từ các điểm B, C, D ta vẽ ba tia By, Cz, Dt cùng vuông góc với α và cùng chiều. Trên By, Dt lần lượt lấy các điểm B', D' với BB' = DD' = x. Mặt phẳng (AB'D') cắt Cz tại Chứng minh.

a. Chứng minh mặt phẳng (AB'D') chứa một đường thẳng cố định khi x thay đổi.

b. Tứ giác AB'C'D' là hình gì ? Tính theo a và x độ dài CC' và điện tích tứ giác AB'C'D'.

c. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng α và (AB'C'D'). Tính tg φ và cos φ theo a và x.

đ. Tính x để AB'C'D' là hình vuông.

Bài tập 30: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Vẽ các tia Bx, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên Bx lấy đoạn BM = x, trên Cy lấy đoạn CN = y.

a. Gọi P là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $PM \le PB < PA$. Suy ra tam giác AMN chỉ có thể vuông tại M hay N.
b. Tìm hệ thức giữa x, y để tam giác AMN vuông tại M.
c. Cho M, N di động luôn thoả điều kiện CN = 2BM. Chứng minh rằng mặt phẳng (AMN) cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường thẳng cố định (Δ). Tìm đường vuông góc chung của Cy và (Δ).
d. Giả sử vẫn có CN = 2BM. Định x và y để tam giác AMN vuông tại M. Trong trường hợp này, nếu gọi I là trung điểm của BC, Chứng minh rằng IAM là tam giác vuông cân.

Bài tập 31: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Từ B và C dựng hai tia Bx, Cy cùng chiều và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho BM + CM = I (I là độ dài cho sẵn).
a. Chứng minh rằng mặt phẳng (AMN) chứa một đường thẳng cố định.
b. Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (AMN). Tìm tập hợp các điểm H.
c. Định vị của MN để diện tích tam giác AMN có giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 32: Cho hai đường thẳng chéo nhau $đ_1$, $đ_2$; A và B là hai điểm trên $đ_1$; C và D là hai điểm trên $đ_2$ sao cho AB = CD.
a. Chứng minh rằng các mặt trung trực của AC, BD cắt nhau theo giao tuyến đ.
b. Chứng minh rằng độ dài các đoạn vuông góc chung của d, d_1 và d, $đ_2$ bằng nhau.
c. Chứng minh rằng góc giữa đ, d_1 và góc giưũa đ, d_2 bằng nhau.

Bài tập 33: Cho hình tứ diện ABCD.
a. Chứng minh rằng:
$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2.$$
b. Từ đó suy ra nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

Bài tập 34: Hai hình vuông ABCD và ABEF có cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc.
a. Tính độ dài DE. Chứng tỏ rằng DE vuông góc với Ac và BF.
b. Đường thẳng song song với AC vẽ từ D cắt AB tại A'. đường thẳng song song với BF vẽ từ E cắt AB tại B'. Chứng minh rằng AA' = BB' = a và A'D = B'E.
c. Tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng A'D và B'E.
đ. Gọi I là một điểm trên tia A'D và J là một điểm trên tia B'E sao cho A'I = B'J = x. Tính IJ theo a và x tìm giá trị nhỏ nhất của IJ.

Bài tập 35: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, giao tuyến là (Δ) lấy ba điểm cố định O, A, D với OA = AD = a. Trong (P) vẽ tam giác OBD vuông cân đỉnh B. Trong (Q) vẽ tia Oz với góc $\widehat{DOz} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$. Gọi C là hình chiếu vuông góc của A trên Oz.
a. Chứng minh rằng AB vuông góc với (Q) và ABC là tam giác vuông.
b. Tính theo a và α độ dài các cạnh của tam giac ABC.
c. Trong (Q) vẽ đường thẳng vuông góc với (Δ) tại D, cắt Oz tại E. Chứng minh rằng $BDE = 90^0$ và EB vuông góc với OB. Gọi β là số đo của nhị diện (E, OB, D). Tính tg β theo tg α

Bài tập 36: Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD, AB = a, BC = b. Gọi I, J là trung điểm của các cạnh AB, CD. Trong mặt phẳng qua IJ và vuông góc với (P) vẽ nửa đường tròn (V) có đường kính là IJ. Gọi S là một điểm bất kì trên (V).

a. Gọi AA' là đường cao vẽ từ A của ΔSAB, Chứng minh rằng AA' vuông góc với BJ.

b. Gọi H', K' lần lượt là các hình chiếu vuông góc của các trực tâm H, K của các tam giác SAB và SCD trên (P). Chứng minh tích số HH'. KK' không đổi khi S di động trên (V). Tính tích số đó theo a và b.

c. Một điểm M chạy trên đường thẳng AD và một điểm N chạy trên đường thẳng BC sao cho góc $\widehat{MH'N}$ luôn bằng 90^0. Tìm vị trí của M, N sao cho diện tích tam giác MH'N là nhỏ nhất.

Bài tập 37: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có AB = a, $BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

a. Chứng minh rằng $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

b. Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với mặt phẳng (HIJ). Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$.

c. Tính diện tích tứ giác AKHL.

Bài tập 38: Cho hình vuông ABCD cạnh a, M là một điểm di động trong không gian sao cho M nhìn các đoạn AB và AD dưới một góc vuông.

a. Chứng minh M luôn di động trên một đường tròn (C) cố định.

b. α là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Đường thẳng DM cắt α tại N. Chứng minh $\widehat{ANB} = 90^0$.

c. Đặt DM = x. Tìm miền biến thiên của x. Tính MN theo a và x. Giả sử MN = k hãy suy ra điều kiện của k để tồn tại x.

d. Đường thẳng CM cắt đường tròn (C) tại M'. Đường thẳng DM' cắt mặt phẳng α tại N'. Chứng minh rằng NN' song song với AB từ đó suy ra tổng $S = \sin^2\widehat{BDN} + \sin^2\widehat{BDN'}$ không đổi khi M di động.

Bài tập 39: Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R; (O) ở trong mặt phẳng α. Dựng AS = 2R vuông góc với mặt phẳng α. Gọi T là một điểm di động trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A. Đặt $\varphi = \widehat{ABT}$ $(0 < \varphi < 90^0)$. Đường thẳng BT gặp đường tròn (O) tại M. Gọi N là hình chiếu vuông góc của A trên SM

a. Chứng minh các mặt của tứ diện SAMB đều là các tam giác vuông.

b. Chứng minh rằng khi T di động, đường thẳng TN luôn đi qua một điểm cố định H.

c. Tính φ để tam giác AHN cân.

Bài tập 40: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình thang ABCD vuông tại A và D, AB = 2a, AD = DC = a. Hai mặt SAB, SAD cùng vuông góc với đáy. SA = a. Gọi E là trung điểm của SA, M là một điểm trên cạnh AD với AM = x, với $0 \le x \le a$. Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAD).

a. Xác định rõ α.

b. α cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì? tính diện tích thiết diện theo a và x.

c. Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của điểm D trên α khi M di động trên cạnh AD.

Bài tập 41: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác cân, AB = AC = a, BAC = α. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α.

a. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Bài tập 42: Cho tứ diện A.BCD. Chứng minh rằng tổng của hai trong ba tích AB.CD, BC.DA, CA.BD lớn hơn tích thứ ba.

Bài tập 43: Cho lăng trụ đứng ABCD. A'B'C'D' đáy là hình thoi có góc nhọn $\hat{A} = \alpha$. Tứ giác ABC'D' có diện tích Q hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc β.

a. Tính theo Q, α, β diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích lăng trụ.

b. Gọi I là trung điểm của CD. Biết $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$ và $Q = a^2\sqrt{6}$. Hãy tính diện tích thiết diện tạo bởi (A'BI) và lăng trụ theo a.

Bài tập 44: Cho lăng trụ đứng OAB. O'A'B', đáy OAB là tam giác vuông ở O và OA = a, OB = b, OO' = h. Gọi (P) là mặt phẳng qua O và vuông góc với AB'.

a. Chỉ rõ cách dựng thiết diện do (P) cắt lăng trụ. Thiết diện là hình gì ? Phân biệt 2 trường hợp.

b. Tìm liên hệ giữa a, b, h để thiết diện là tam giác. Khi đó hãy tính diện tích thiết diện.

Bài tập 45: Cho lăng trụ đứng ABCD. $A_1B_1C_1D_1$, có đáy là nửa lục giác đều với AD = CD = BC. Mặt phẳng (A_1B_1CD) hợp với đáy góc 60^0. Một mặt phẳng α di động qua AB_1 cắt CC_1, DD_1 theo thứ tự tại C', D'.

a. Tứ giác AB_1C'D' là hình gì ? Chứng tỏ AB_1 = 2C'D'.

b. Dựng thiết diện AB_1C'D' có diện tích nhỏ nhất.

c. Biết diện tích nhỏ nhất có giá trị là Q. Tính thể tích lăng trụ theo Q.

Bài tập 46: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D', đáy là nửa lục giác đều với AD = 2a, AB = BC = CD = a. Đường cao của lăng trụ là h. α là mặt phẳng qua AD', cắt các cạnh BB', CC' lần lượt tại B_1, C_1.

a. Thiết diện của lăng trụ cắt bởi α là hình gì ? Tìm liên hệ giữa a và h và tìm vị trí của B_1, C_1 sao cho α vuông góc với A'D.

b. Định α để diện tích thiết diện nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất ấy.

c. Định vị trí của α để chu vi thiết diện nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất ấy.

Bài tập 47: Cho lăng trụ tam giác đều ABC. A'B'C' có chiều cao $a\sqrt{3}$, cạnh đáy a. Một mặt phẳng (P) quay quanh A cắt các cạnh BB', CC' lần lượt tại M, N. Đặt BM = x, CN = y.

a. Chứng minh tam giác AMN không thể vuông tại A. Tìm liên hệ giữa x, y để tam giác AMN vuông tại M. Khi đó tìm các khoảng cách biến thiên của x, y.

b. Khi tam giác AMN vuông tại M, tính giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của diện tích tam giác AMN.

Bài tập 48: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = b và cạnh bên AA' = c. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với CA'.

a. Biện luận theo a, b, c các dạng của thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (P).
b. Tính diện tích thiết diện khi nó là tam giác.

Bài tập 49: Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C', cạnh đáy a, đường cao h.

a. Tìm điều kiện giữa a và h để tồn tại trên AA' một điểm M sao cho (MBC) và (MB'C') vuông góc. Điều kiện này được thoả trong những câu tiếp theo.
b. Tính tổng các bình phương các diện tích các tam giác MBC là MB'C' theo a và h.
c. Chứng tỏ rằng mặt phẳng qua M và vuông góc với B'C cắt lăng trụ theo một tam giác. Tính diện tích tam giác ấy theo a và h.

Bài tập 50: Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh bằng a. M là một điểm di động trên cạnh AB. Đặt AM = x, với $0 \le x \le a$. Mặt phẳng (A'MC) cắt hình lập phương theo một thiết diện.

a. Chứng minh thiết diện là hình bình hành có một đường chéo cố định, còn đường cheo kia vuông góc với CB'.
b. Với vị trí nào của M, thiết diện là hình chữ nhật ? liệu nó có thể là hình vuông được không?
c. Định M để diện tích thiết diện nhỏ nhất. Khi đó hãy tính góc mà (A'MC) hợp với đáy.
d. MC cắt BD tại I, NC cắt DC' tại J. Chứng tỏ IJ qua một điểm cố định và mặt phẳng (A'MCN) vuông góc với mặt phẳng (BDC').

Bài tập 51: cho lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F'. Đường chéo AD' hợp với mặt bên (CDD'C') một góc $\alpha = 30^0$. Mặt phẳng β qua AB và D'E' cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích Q.

a. Chứng minh β qua các trung điểm của CC' và FF'.
b. Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.
c. Tính khoảng cách giữa AD' và BD.

CHƯƠNG IV

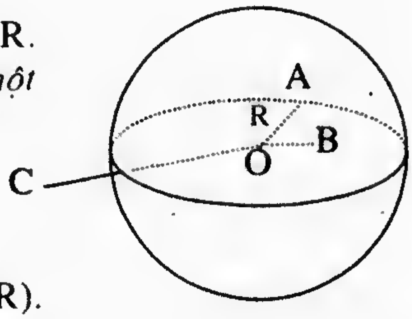
MẶT CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY

CHỦ ĐỀ 1

MẶT CẦU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. MẶT CẦU



Định nghĩa: *Cho một điểm O cố định và một số dương R. Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O một khoảng bằng R được gọi là mặt cầu tâm O bán kính R.*

Như vậy, ta có:

$$S(O, R) = \{M \mid OM = R\}$$

Cho mặt cầu S(O, R) và một điểm A nào đó, ta có:

- Nếu $OA < R$ thì điểm A nằm trong mặt cầu S(O, R).
- Nếu $OA = R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu S(O, R).
- Nếu $OA > R$ thì điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O, R).

2. BÁN KÍNH, ĐƯỜNG KÍNH CỦA MẶT CẦU

Định nghĩa: Nếu điểm A nằm trên mặt cầu S(O, R) thì đoạn thẳng OA được gọi là bán kính của mặt cầu (S). Trên đường thẳng OA lấy điểm B sao cho O là trung điểm của AB thì $OB = R$ nên B cũng thuộc mặt cầu (S). Đoạn thẳng AB được gọi là đường kính của mặt cầu S(O, R).

Như vậy, một mặt cầu hoàn toàn được xác định khi:

- Biết tâm và bán kính của nó.
- Biết một đường kính của nó.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Xác định mặt cầu

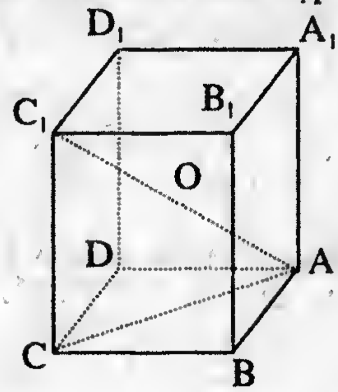
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh một điểm M thuộc mặt cầu S(O, R) ta có lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $OM = R$.

Cách 2: Chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$ với AB là một đường kính của S(O, R).

Ví dụ 1: Chứng minh rằng tám đỉnh của một hình hộp chữ nhật cùng nằm trên một mặt cầu. Hãy tính bán kính của mặt cầu đó biết ba kích thước của hình hộp chữ nhật là a, b, c.



Giải

Gọi O là trung điểm AC_1, ta có:

$$OA = OC_1 = \frac{1}{2}AC_1.$$

Vì ΔACC_1 cuông tại C nên:

$$OC = \frac{1}{2}AC_1.$$

Lập luận tương tự, ta cũng có:

$$OB = OD = OA_1 = OB_1 = OD_1 = \frac{1}{2}AC_1.$$

Vậy, ta được:

$$OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = \frac{1}{2}AC_1$$

$\Leftrightarrow$ A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 cũng thuộc mặt cầu S(O, $\frac{AC_1}{2}$).

Ta có:

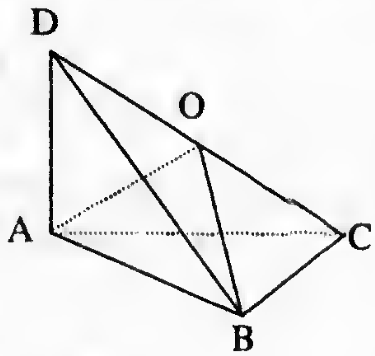
$$R = \frac{1}{2}.AC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + C_1C^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + C_1C^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vậy, mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp có bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có DA = 5a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại B và AB = 3a, BC = 4a.

a. Xác định mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

b. Tính bán kính của mặt cầu nói trên.



Giải

a. Gọi O là trung điểm CD.

Vì DA $\perp$ (ABC) nên:

$$DA \perp AC \Rightarrow OA = OC = OD = \frac{CD}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD \Rightarrow OB = \frac{CD}{2}.$$

Vậy, ta được:

$$OA = OB = OC = OD = \frac{CD}{2}$$

$\Leftrightarrow$ A, B, C, D cũng thuộc mặt cầu S(O, $\frac{CD}{2}$).

b. Ta có:

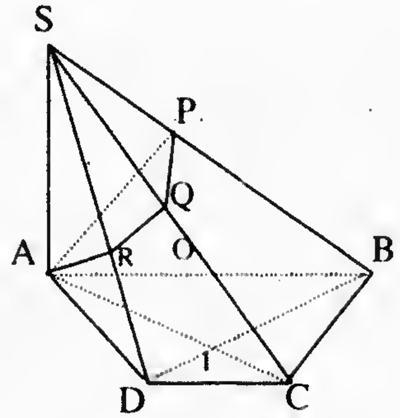
$$R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{25a^2 + 9a^2 + 16a^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D có bán kính $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân ABCD với AB = 2a, BC = CD = DA = a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy một điểm di động S. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại P, Q, R theo thứ tự đó.

a. Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu cố định.
b. Chứng minh rằng tứ giác APQR là một tứ giác nội tiếp và đường thẳng QR luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên đường thẳng Ax.
c. Cho $SA = a\sqrt{3}$. Hãy tính diện tích của tứ giác APQR.

Giải



a. Gọi O là trung điểm của AB, ta có:

$$SB \perp (APQR) \Rightarrow SB \perp AP$$
$$\Rightarrow OA = OB = OP = \frac{AB}{2} = a.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ. \quad (1)$$

Ngoài ra, ta có:

$$SB \perp (APQR) \Rightarrow SB \perp AQ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp QB \Rightarrow OQ = \frac{AB}{2} = a.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AR. \quad (3)$$

Ngoài ra, ta có:

$$SB \perp (APQR) \Rightarrow SB \perp AR. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp RB \Rightarrow OR = \frac{AB}{2} = a.$$

Vậy, ta được:

$$OA = OB = OP = OQ = OR = a$$

$\Leftrightarrow$ bảy điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu S(O, a).

b. Dựa trên kết quả trong câu a), ta có:

$$AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp PQ$$
$$AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp RP$$

suy ra, tứ giác APQR nội tiếp trong đường tròn đường kính AP.

Gọi K là giao điểm của QR với CD, ta có:

$$\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp SA \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SAB) \Rightarrow \text{đường thẳng } AK \text{ cố định}.$$

Vậy, đường thẳng QR luôn đi qua điểm cố định K khi S chạy trên đường thẳng Ax.

c. *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng tám đỉnh của một hình lập phương cùng nằm trên một mặt cầu. Hãy tính bán kính của mặt cầu đó biết hình lập phương có cạnh bằng a.

Bài tập 2: Chứng minh rằng sáu đỉnh của một hình lăng trụ đứng cùng nằm trên một mặt cầu. Hãy tính bán kính của mặt cầu đó biết hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều cạnh bằng a và chiều cao lăng trụ bằng h.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD có DA = 4a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại A và AB = 6a, AC = 8a.

a. Xác định mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

b. Tính bán kính của mặt cầu nói trên.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Xác định mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, D, S.

b. Tính bán kính của mặt cầu nói trên.

Bài tập 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy AB = a và cạnh bên SA = b.

a. Xác định mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, D, S.

b. Tính bán kính của mặt cầu nói trên.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, BC = b. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy điểm S sao cho SA = c. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại P, Q, R theo thứ tự đó.

a. Chứng minh rằng 7 điểm A, B, C, D, P, Q, R luôn thuộc một mặt cầu. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

b. Cho $SA = a\sqrt{3}$. Hãy tính diện tích của tứ giác APQR.

Bài toán 2: Quĩ tích điểm là mặt cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tìm quĩ tích điểm M thoả mãn tính chất K (quĩ tích là một mặt cầu) ta có lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tìm một điểm O cố định rồi từ đó dựa trên tính chất K chứng minh OM = R với R là độ dài không đổi.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B cố định rồi từ đó dựa trên tính chất K chứng minh $\widehat{AMB} = 90^0$.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hai điểm cố định A, B. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian sao cho $MA^2 + MB^2 = k^2$, với k là hằng số.

Giải

Gọi O là trung điểm AB, khi đó với điểm M ta có:

$$OM^2 = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2) - \frac{AB^2}{4}, \text{ định lí đường trung tuyến}$$

$$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}.$$

Vậy, ta được:

$$\{M \mid MA^2 + MB^2 = k^2\} = \left\{M \mid OM^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}\right\}$$

từ đó:

- Nếu $\frac{k^2}{2} > \frac{AB^2}{4}$ thì đặt $R = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{AB^2}{4}}$ ta được:

$$\{M \mid MA^2 + MB^2 = k^2\} = \{M \mid OM = R\} = S(O, R)$$

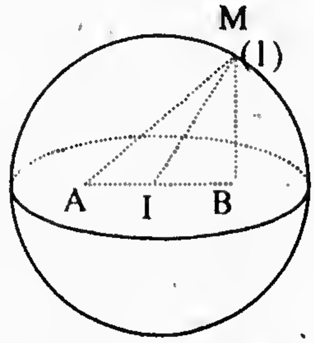
- Nếu $\frac{k^2}{2} = \frac{AB^2}{4}$ thì $OM = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$. Vậy quĩ tích M chỉ gồm một điểm O.
- Nếu $\frac{k^2}{2} < \frac{AB^2}{4}$ thì quĩ tích là tập rỗng.

Chú ý. Với mỗi điểm A và mặt cầu S(O, R), đặt OA = d ta định nghĩa:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = d^2 - R^2.$$

<u>Ví dụ 2:</u> Cho AB = 4 và hai mặt cầu $S_1(A, 2)$ và $S_2(B, 3)$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn:

$$\mathscr{P}_{M/(A)} + \mathscr{P}_{M/(B)} = 27. \quad (1)$$



Giải

Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(A)} = MA^2 - R_A^2 = MA^2 - 4. \quad (2)$$

$$\mathscr{P}_{M/(B)} = MB^2 - R_B^2 = MB^2 - 9. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$MA^2 + MB^2 - 13 = 27 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 40. \quad (4)$$

Gọi I là trung điểm AB, ta biến đổi (4) về dạng:

$$2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 40 \Leftrightarrow MI^2 = 16 \Leftrightarrow MI = 4.$$

Vậy, tập hợp điểm M thuộc mặt cầu (I, 4).

<u>Ví dụ 3:</u> Cho đường thẳng (d) và một điểm I không thuộc (d). Gọi M là một điểm di động trên (d). Tìm quỹ tích các điểm N sao cho:

$$\overline{IM} \cdot \overline{IN} = k, \text{ k là hằng số khác 0.}$$

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (d), khi đó lấy trên đường thẳng IH điểm E sao cho:

$$\overline{IH} \cdot \overline{IE} = k \Rightarrow \text{E cố định.}$$

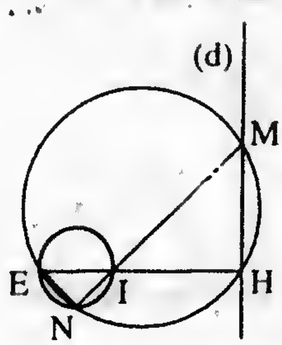
Khi đó, kết hợp với điều kiện giả thiết, ta được:

$$\overline{IH} \cdot \overline{IE} = \overline{IM} \cdot \overline{IN} \Leftrightarrow \text{tứ giác MHNE nội tiếp}$$

Suy ra, hai tam giác ΔIHM và ΔINE đồng dạng

$\Rightarrow$ N nhìn EI dưới một góc vuông.

Vậy, tập hợp điển N thuộc mặt cầu đường kính EI.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tìm tập hợp tất cả những điểm M trong không gian nhìn đoạn AB cố định dưới góc vuông.

Bài tập 2: Cho hai điểm cố định A, B. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian sao cho $\widehat{AMB} = \alpha$, với $0 < \alpha \le 90^0$.

CHỦ ĐỀ 2

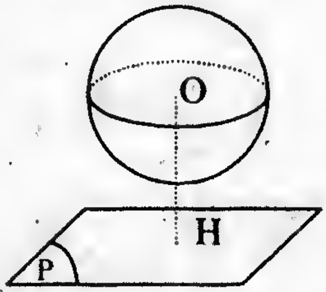
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MẶT CẦU VỚI MẶT PHẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

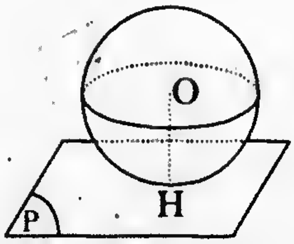
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

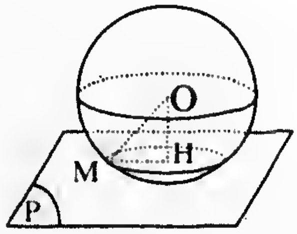
1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MỘT MẶT CẦU VÀ MỘT MẶT PHẲNG

Cho mặt cầu S(O, R) và mặt phẳng (P) bất kì. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (P) và d = OH là khoảng cách từ O tới (P), khi đó:

- Nếu $d > R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (P) tiếp xúc với (S) tại H. Khi đó (P) được gọi là *tiếp diện* của (S).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (P) \cap (S) = (C)$ là một đường tròn nằm trong mặt phẳng (P) với $C(H, \sqrt{R^2 - d^2})$.







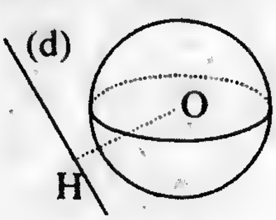
Chú ý: Trường hợp đặc biệt d = 0, khi đó $O \equiv H$ do đó:

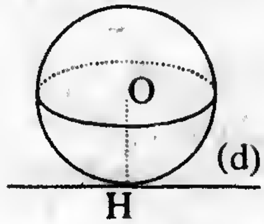
C(O, R), được gọi là đường tròn lớn của mặt cầu S(O, R).

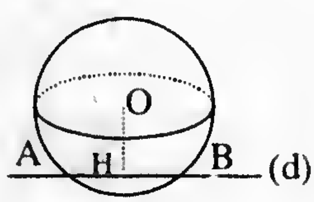
2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA MỘT MẶT CẦU VÀ MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu S(O, R) và đường thẳng d bất kì. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d và h = OH là khoảng cách từ O tới d, khi đó:

- Nếu $h > R \Leftrightarrow d \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu $h = R \Leftrightarrow$ d tiếp xúc với (S) tại H. Khi đó d được gọi là *tiếp tuyến* của (S).
- Nếu $h < R \Leftrightarrow d \cap (S) = \{A, B\}$.

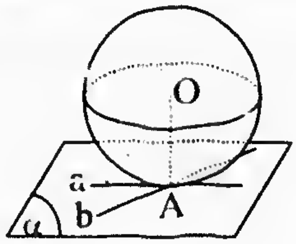






Chú ý: Trường hợp đặc biệt d = 0, khi đó $O \equiv H$ do đó AB là một đường kính của mặt cầu.

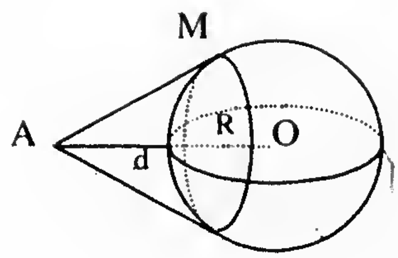
3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TIẾP TUYẾN



Định lí 1: *Qua điểm A nằm trên mặt cầu S(O, R) có vô số tiếp tuyến của mặt cầu (S). Tất cả các tiếp tuyến đó đều nằm trên tiếp diện của (S) tại điểm A.*

Ta có:

$a \perp OA$ tại $A \Rightarrow a \in \alpha$.



***Định lí 2**: Qua điểm A nằm ngoài mặt cầu S(O, R) có vô số tiếp tuyến của mặt cầu (S). Độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A tới các tiếp điểm đều bằng nhau.*

Ta có, với OA = d thì nếu:

$$AM \perp OM \Rightarrow AM = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Mặt cầu và mặt phẳng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

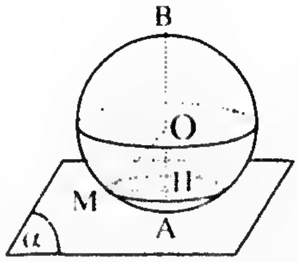
Sử dụng kiến thức về vị trí tương đối của mặt phẳng với mặt cầu để giải.

Ví dụ 1: Cho một mặt cầu đường kính AB = 2R. Cắt mặt cầu bởi mặt phẳng α vuông góc với AB tại H sao cho AH = x, với $0 < x < 2R$, ta được thiết diện là hình tròn (C). Gọi MNPQ là hình vuông nội tiếp trong đường tròn (C).

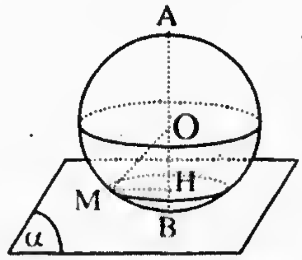
a. Tính bán kính và diện tích của đường tròn (C).

b. Tính cạnh của hình vuông MNPQ và các đoạn thẳng AM, BM.

Giải



Với $0 < x \le R$



Với $R < x < 2R$

a. Ta có:

$$d = OH = \begin{cases} OA - AH & \text{với } 0 < x \le R \\ AH - OA & \text{với } R < x < 2R \end{cases} = |OA - AH| = |R - x| < R$$

suy ra $S(O, R) \cap \alpha = C(H, MH) = C(H, r)$ với:

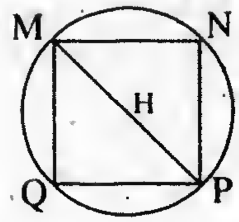
$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{2Rx - x^2},$$

$$S_{(C)} = \pi.(R - x)^2 = \frac{3\pi R^2}{4}.$$

b. Gọi y là độ dài cạnh hình vuông MNPQ, ta có ngay:

$$MP = MN\sqrt{2} \Leftrightarrow 2r = y\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{2}.\sqrt{2Rx - x^2} = \sqrt{2(2Rx - x^2)}.$$



Vậy, độ dài cạnh hình vuông MNPQ bằng $\sqrt{2(2Rx - x^2)}$.

Trong ΔMAB vuông tại M, đường cao MH, ta có:

$$AM^2 = AB.AH = 2Rx \Rightarrow AM = \sqrt{2Rx},$$

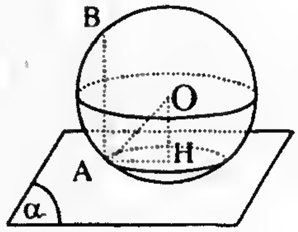
$$BM^2 = AB.BH = AB.(AB - AH) = 2R(2R - x) \Rightarrow BM = \sqrt{2R(2R - x)}.$$

Ví dụ 2: Cho hình cầu S(O, R), A là điểm ở trên mặt cầu, α là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và α là 30^0.

a. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi α và mặt cầu.

b. Đường thẳng qua A vuông góc với α cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

Giải



a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên α.

Trong ΔOAH vuông tại H, ta có:

$$\widehat{OAH} = 30^0,$$

$$AH = OA.\cos\widehat{OAH} = R.\cos 30^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

$$d = OH = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2} < R$$

suy ra $S(O, R) \cap \alpha = C(H, AH) = C(H, \frac{R\sqrt{3}}{2})$ và:

$$S_{(C)} = \pi.\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi R^2}{4}.$$

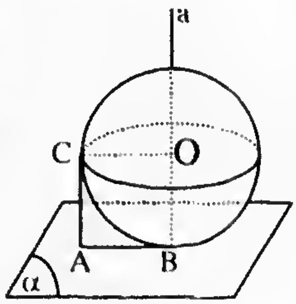
b. Trong ΔOAB cân tại O, ta có:

$$\widehat{BAO} = 90^0 - 30^0 = 60^0 \Rightarrow \Delta OAB \text{ là tam giác đều} \Rightarrow AB = OA = R.$$

Vậy, ta được AB = R.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng α cho hai điểm A, B. Trên đường thẳng vuông góc với α tại A ta lấy điểm C sao cho AB = AC = a. Chứng minh rằng có một mặt cầu (S) đi qua C và tiếp xúc với α tại B. Xác định tâm và tính bán kính của (S).

Giải



a. Trên đường thẳng a vuông góc với α tại B ta lấy điểm O sao cho OBAC là hình vuông, khi đó với mặt cầu S(O, a) ta có:

$OC = a \Rightarrow C \in (S)$,

$OB = a$ và $OB \perp \alpha \Rightarrow (S)$ tiếp xúc với α tại B.

Vậy, mặt cầu S(O, a) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 4:

a. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự là trọng tâm các ΔBCD, ΔACD, ΔABD. Chứng minh rằng các đoạn AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại một điểm G và $\frac{GA}{GA_1} = \frac{GB}{GB_1} = \frac{GC}{GC_1} = \frac{GD}{GD_1} = 3$.

b. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của một tứ diện đều cạnh a.

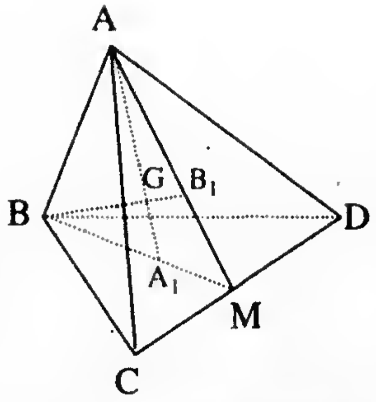
Giải

a. Gọi M là trung điểm CD và $G = AA_1 \cap BB_1$.

Áp dụng định lí Mêlêlaus cho ΔMAB, ta được:

$$\frac{B_1M}{B_1A}.\frac{GA}{GA_1}.\frac{BA_1}{BM} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{GA}{GA_1}.\frac{2}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{GA}{GA_1} = 3.$$



Chứng minh tương tự, ta có kết luận các đoạn AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại một điểm G và $\frac{GA}{GA_1} = \frac{GB}{GB_1} = \frac{GC}{GC_1} = \frac{GD}{GD_1} = 3$.

b. Với tứ diện đều ABCD cạnh a, ta có AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt vuông góc với các mặt tương ứng của tứ diện và:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow GA_1 = GB_1 = GC_1 = GD_1 = \frac{1}{4}AA_1 = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$

Vậy, mặt cầu S(G, $\frac{a\sqrt{6}}{12}$) tiếp xúc với các mặt của tứ diện đều ABCD.

Chú ý:

1. Mặt cầu nội tiếp hình chóp là mặt cầu nằm bên trong hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp.
2. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp đỉnh S có hình cầu nội tiếp tâm I là trên mặt đáy có một điểm M cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp và khi đó I nằm trên đoạn SI.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng α với mặt cầu S(O, R), biết khoảng cách từ O đến α bằng $\frac{R}{2}$.

Bài tập 2: Cho hình cầu S(O, R), A là điểm ở trên mặt cầu, α là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và α là 45^0.

a. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi α và mặt cầu.

b. Đường thẳng qua A vuông góc với α cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

Bài tập 3: Cho hình cầu tâm O bán kính R, A là một điểm ở trên mặt cầu, α là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa OA và α là 60^0.

a. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi α và hình cầu.

b. Gọi β là mặt phẳng cắt hình cầu theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{\pi R^2}{2}$. Tính khoảng cách từ O đến β.

Bài tập 4: Cho một mặt cầu đường kính AB = 2R. Gọi H là điểm trên AB sao cho $AH = \frac{4R}{3}$. Mặt phẳng α qua H và vuông góc với AB cắt mặt cầu theo thiết diện là hình tròn (C). Gọi MNP là tam giác đều nội tiếp trong đường tròn (C).

a. Tính bán kính, chu vi và diện tích đường tròn (C)

b. Tính cạnh của ΔMNP và các đoạn thẳng AM, BM.

Bài tập 5: Cho hình cầu tâm O bán kính R và đường kính SS_1. Một mặt phẳng vuông góc với SS_1 cắt hình cầu theo một đường tròn tâm H. Gọi ABC là một tam giác đều nội tiếp trong đường tròn này. Đặt $SH = x$, với $0 < x < 2R$.

a. Tính các cạnh của tứ diện SABC theo R và x.

b. Xác định x để SABC là tứ diện đều, khi đó chứng minh rằng S_1A, S_1B. S_1C đôi một vuông góc với nhau.

Bài tập 6: Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu tiếp xúc với cả sáu mặt của một hình lập phương có cạnh bằng a.

Bài tập 7: Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu tiếp xúc với cả năm mặt của một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng (P) cho hình thang ABCD cân có $AB = 2a$ và $BC = CD = AD = a$, Gọi O là trung điểm AB. Trên đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) tại O, lấy điểm S sao cho $OS = 2a$.

a. Chứng tỏ rằng O cách đều 4 mặt bên của hình chóp S.ABCD

b. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu tiếp xúc với cả năm mặt của hình chóp.

Bài toán 2: Mặt cầu và đường thẳng.

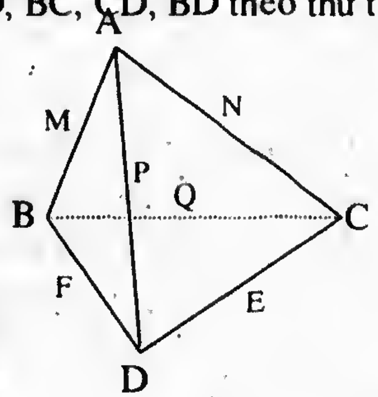
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng kiến thức về vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu để giải.

<u>**Ví dụ 1:**</u> Chứng minh rằng nếu một mặt cầu tiếp xúc với sáu cạnh của một hình tứ diện thì tổng các cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau.

Giải

Giả sử mặt cầu (S) tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, BD theo thứ tự tại M, N, P, Q, E, F. Khi đó, sử dụng định lí 2 ta có:



$AM = AN = AP = a$, các tiếp tuyến kẻ từ A

$BM = BF = BQ = b$, các tiếp tuyến kẻ từ B

$CE = CN = CQ = c$, các tiếp tuyến kẻ từ C

$DE = DF = DP = d$, các tiếp tuyến kẻ từ D

Từ đó, suy ra:

$AB + CD = AM + BM + CE + DE = a + b + c + d$

$AC + BD = AN + CN + BF + DF = a + b + c + d$

$AD + BC = AP + DP + BQ + CQ = a + b + c + d$

Vậy, tổng các cặp cạnh đối của tứ diện bằng nhau.

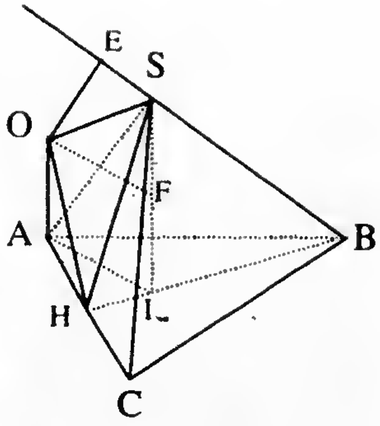
<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 45^0. Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh BS kéo dài về phía S.

a. Tính bán kính của mặt cầu.

b. Mặt phẳng α qua tâm của mặt cầu (S) và đường cao BH của ΔABC. Tính số đo góc hợp bởi hai mặt phẳng α và (ABC).

Giải

a. Giả sử mặt cầu S(O, R) tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh BS kéo dài về phía S tại E.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC), ta có:

$$\widehat{SAI} = 45^0 \Rightarrow SI = AI = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$SC = SB = SA = AI\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vì BA và BE đều là tiếp tuyến củ (S) nên BE = BA = a.

Hạ $OF \perp SI$ tại F, khi đó với hai tam giác vuông OES và OFS ta có:

$$OS^2 = OE^2 + SE^2 = OF^2 + SF^2 \Leftrightarrow OE^2 + (BE - SB)^2 = AI^2 + (SI - IF)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - a\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - a\right)^2 \Leftrightarrow R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}.$$

Vậy, mặt cầu (S) có bán kính $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}$.

b. Ta có ngay, góc hợp bởi hai mặt phẳng α và (ABC) là $\widehat{OHA}$

Trong ΔOAH vuông tại A, ta có:

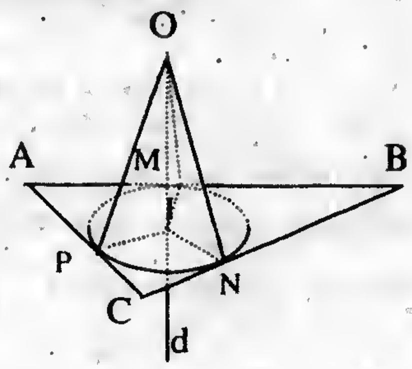
$$\text{tg}\widehat{OHA} = \frac{OA}{AH} = \frac{R}{a/2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Vậy, hai mặt phẳng α và (ABC) hợp với nhau một góc $\text{tg}\widehat{OHA} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

<u>**Ví dụ 3:**</u> . Tìm quỹ tích tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác.

Giải

Với ΔABC, gọi S(O, R) là mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại M, N, P. Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC).



Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp OI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OIM) \Rightarrow AB \perp IM.$$

Chứng minh tương tự, ta được $BC \perp IN$, $AC \perp IP$.

Ngoài ra, ta có:

$$OM = ON = OP = R \Rightarrow \Delta OIM = \Delta OIN = \Delta OIP$$
$$\Rightarrow IM = IN = IP = r.$$

Suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

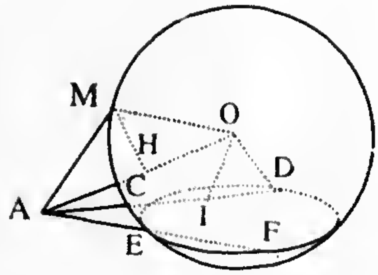
Vậy, quỹ tích tâm các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của ΔABC thuộc trục d của đường tròn nội tiếp ΔABC.

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho mặt cầu S(O, R) và điểm A cố định ở ngoài (S). Đặt OA = d, với d > R. Từ A kẻ tiếp tuyến AM tới mặt cầu M là tiếp điểm, từ A kẻ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại C, D và E, F.

a. Chứng minh rằng $AC.AD = AE.AF = d^2 - R^2$ và hình chiếu vuông góc của M trên OA là một điểm cố định.

b. Tìm tập hợp các điểm M.

Giải



a. Gọi I là trung điểm của CD, ta có:

$$AC.AD = (AI - CI)(AI + DI)$$
$$= AI^2 + AI.DI - CI.AI - CI.DI$$
$$= AI^2 - CI^2 = (AO^2 - OI^2) - (CO^2 - OI^2)$$
$$= d^2 - R^2.$$

Chứng minh tương tự, ta nhận được $AE.AF = d^2 - R^2$.

Vậy, ta luôn có $AC.AD = AE.AF = d^2 - R^2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên OA.

Trong ΔOAM vuông tại M, ta có:

$$OA.OH = OM^2 \Rightarrow OH = \frac{OM^2}{OA} = \frac{R^2}{d} \Rightarrow \text{H cố định.}$$

b. Nhận xét rằng:

MH $\perp$ OA tại điểm H cố định H

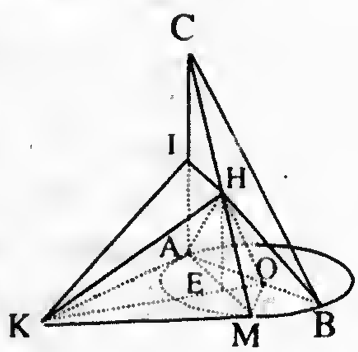
$$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^4}{d^2}} = \frac{R\sqrt{d^2 - R^2}}{d}$$

do đó, tập hợp các điểm M thuộc đường tròn $C(H, \frac{R\sqrt{d^2 - R^2}}{d})$ nằm trong mặt phẳng α qua H và vuông góc với OA.

<u>**Ví dụ 5:**</u> Trong mặt phẳng α cho đường tròn đường kính AB, M là một điểm di động trên đường tròn (AB), C là một điểm nằm trên đường thẳng vuông góc với α tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên CM.

a. Chứng minh rằng H nằm trên mặt cầu đường kính AB, tìm tập hợp các điểm H.
b. Tiếp tuyến tại A và M của đường tròn (AB) cắt nhau tại K. Chứng minh rằng KA = KM = KH, từ đó suy ra KH là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB.
c. Chứng minh rằng KH tiếp xúc với mặt cầu đường kính AC.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow BM \perp (MAC) \Rightarrow BM \perp AH.$$

Ngoài ra, ta có:

$$CM \perp AH \Rightarrow AH \perp (MBC) \Rightarrow AH \perp BH$$
$\Rightarrow$ H nằm trên mặt cầu đường kính AB.

- Tìm tập hợp điểm H: Ta nhận thấy:

$$AH \perp (MBC) \Rightarrow AH \perp BC$$
$\Rightarrow$ H thuộc mặt phẳng β qua A và vuông góc với BC.

Vậy, tập hợp điểm H thuộc đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu đường kính AB với mặt phẳng β.

b. Gọi O là trung điểm AB, nối KO cắt AM tại E là trung điểm của AM.

Ta có:

ΔAHM vuông tại H $\Rightarrow$ E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAHM

$$\begin{cases} OK \perp AM \\ OK \perp AC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (AHM) \text{ tại } E$$

suy ra OK là trục đường tròn ngoại tiếp ΔAHM, do đó:

$KA = KM = KH$, đpcm.

Từ đó:

$KH^2 + OH^2 = KA^2 + OA^2 = OK^2 \Rightarrow \Delta OHK$ vuông tại H $\Rightarrow KH \perp OH$

Vậy, KH là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AB.

c. Gọi I là trung điểm AC, suy ra:

$HI = \dfrac{1}{2}AC = AI$, tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông.

Nhận xét rằng:

$KH^2 + HI^2 = KA^2 + AI^2 = KI^2 \Rightarrow \Delta IHK$ vuông tại H $\Rightarrow KH \perp IH$

Vậy, KH là tiếp tuyến của mặt cầu đường kính AC.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho ΔABC có $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$. Mặt cầu (S) có bán kính bằng 8 tiếp xúc với ba cạnh của ΔABC tại các tiếp điểm nằm trên ba cạnh. Tính khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) tới mặt phẳng (ABC).

Bài tập 2: Cho mặt cầu S(O, a) và một điểm A, biết $OA = 2a$. Qua A kẻ một tiếp tuyến tiếp xúc với (S) tại B và cũng qua A kẻ một cát tuyến cắt (S) tại C và D, biết $CD = a\sqrt{3}$.

a. Tính độ dài AB.

b. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng CD.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng (P) cho ΔABC vuông tại A, $\widehat{C} = 60^0$ và $BC = 2a$. Dựng các đường thẳng Bx và Cy vuông góc với (P).

a. Xác định điểm M trên Bx sao cho mặt cầu đường kính BM tiếp xúc với Cy.

b. E là một điểm di động trên Bx. Hỏi E phải ở vị trí nào để trên Cy để có thể tìm được điểm N sao cho ΔBEN có góc N vuông.

Bài tập 4: Cho tứ diện đều cạnh a.

a. Chứng minh rằng các đoạn vuông góc chung của các cạnh đối diện cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

b. Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu tiếp xúc với cả sáu cạnh tứ diện.

Bài tập 5: Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông ABCD có cạnh a và tâm O ta lấy một điểm S di động. Gọi B_1 là hình chiếu của A trên cạnh SB, và O_1 là điểm đối xứng của tâm O qua cạnh AB. Chứng minh rằng khi S thay đổi, đường thẳng O_1B_1 luôn luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Bài tập 6: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và đường cao bằng h, gọi I là tâm của ΔABC. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với các mặt bên và các cạnh đáy của hình chóp.

a. Chứng minh rằng tâm của (S) thuộc đường thẳng SI.

b. Chứng minh rằng các tiếp điểm của (S) với các cạnh đáy là trung điểm của các cạnh này.

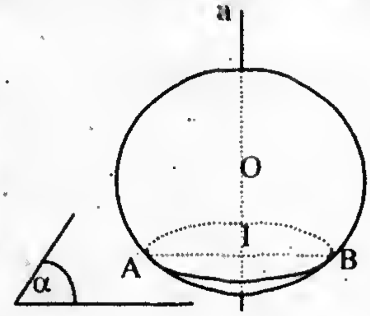
c. Xác định tâm và tính bán kính của (S).

Bài toán 3: Mặt cầu chứa một đường tròn cố định.

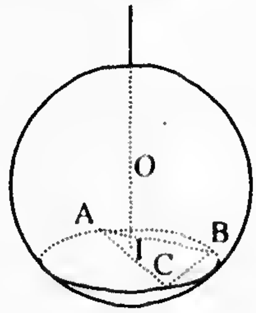
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta có hai trường hợp thường gặp:

1. Nếu mặt cầu S(O, R) thay đổi nhưng luôn chứa hai điểm cố định A, B và tâm O chạy trên đường trục a của AB thì mặt cầu (S) luôn chứa đường tròn cố định (C) đường kính AB và nằm trong mặt phẳng α chứa AB và vuông góc với a.



2. Mặt cầu (S) thay đổi nhưng nếu (S) luôn chứa 3 điểm cố định A, B, C không thẳng hàng thì (S) luôn chứa đường tròn (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

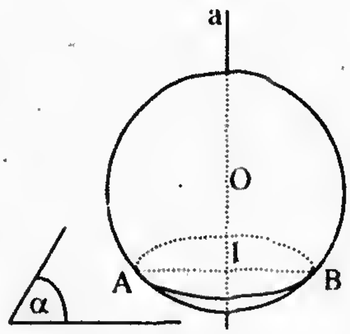


<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho một điểm A cố định nằm ngoài đường thẳng a cố định. Một điểm O thay đổi trên a. Chứng minh rằng S(O, OA) luôn chứa một đường tròn cố định.

Giải

Gọi B là điểm đối xứng với A qua a, suy ra B cố định.

Vậy, ta thấy mặt cầu S(O, OA) thay đổi nhưng luôn chứa hai điểm cố định A, B và tâm O chạy trên đường trục a của AB do đó (S) luôn chứa đường tròn cố định (C) đường kính AB và nằm trong mặt phẳng α chứa AB và vuông góc với a.

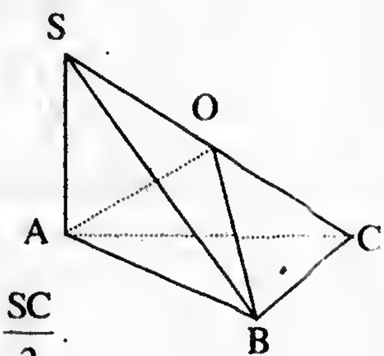


<u>**Ví dụ 2:**</u> Trong mặt phẳng α cho ΔABC vuông tại B, trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng α tại A lấy điểm S di động.

a. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, S cùng thuộc mặt cầu (S).

b. Chứng minh rằng (S) luôn chứa một đường tròn cố định.

Giải



a. Gọi O là trung điểm SC.

Vì SA ⊥ (ABC) nên:

$$SA \perp AC \Rightarrow OA = OC = OS = \frac{SC}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow OB = \frac{SC}{2}.$$

Vậy, ta được:

$$OA = OB = OC = OS = \frac{SC}{2}$$

$$\Leftrightarrow A, B, C, S \text{ cũng thuộc mặt cầu } S(O, \frac{SC}{2}).$$

b. Vì ba điểm A, B, C luôn thuộc (S) nên mặt cầu (S) luôn chứa đường tròn cố định (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ví dụ 3: Cho mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc với mặt phẳng α tại I. M là một điểm di động trên (S). Hai tiếp tuyến của (S) tại M cắt α tại A và B.

a. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.
b. I là điểm đối xứng của I qua AB. Chứng minh rằng bốn điểm I, I', M, O đồng phẳng và I'M đi qua một điểm cố định J trên (S).
c. Cho M di động trên (S) sao cho góc $\widehat{AMB} = 90^0$, các điểm A và B lần lượt chạy trên các đường thẳng d, d' nằm trong α và d vuông góc với d' tại K. Hãy chứng minh rằng khi ấy mặt cầu đường kính AB luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

Giải

a. Xét hai ΔAMB và ΔAIB, ta có:

AB chung
AM = AI, vì cùng là tiếp tuyến qua A tới (S)
BM = BI, vì cùng là tiếp tuyến qua A tới (S)

suy ra:

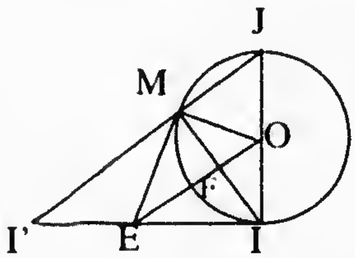
$\Delta AMB = \Delta AIB$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIB}$, đpcm.

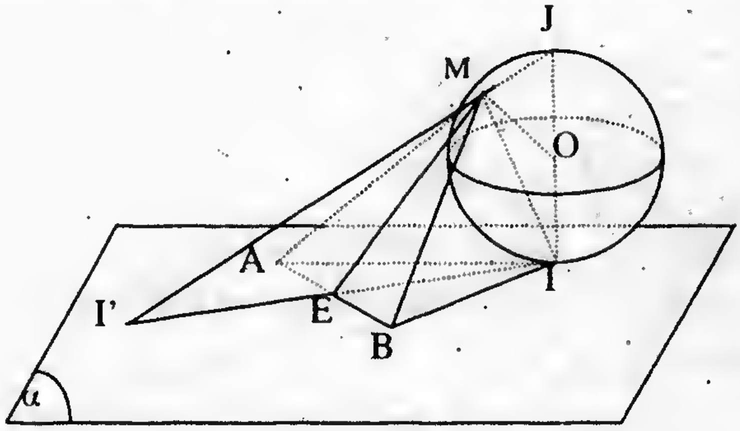
b. Nhận xét rằng:

$AB \perp II'$, do tính đối xứng
$\alpha \perp OI \Rightarrow AB \perp OI$

$$\begin{cases} OM \perp MA \\ OM \perp MB \end{cases} \Rightarrow OM \perp (MAB) \Rightarrow AB \perp OM$$

Vậy, bốn điểm I, I', M, O đồng phẳng vì cùng thuộc mặt phẳng qua O và vuông góc với AB.





Giả sử IO cắt (S) tại J, ta có nhận xét:

EF là đường trung bình của $\Delta I'IM \Rightarrow I'M \parallel EF \Rightarrow I'M \parallel OE$
OF là đường trung bình của $\Delta JIM \Rightarrow JM \parallel OF \Rightarrow JM \parallel OE$

tức là I', M, J thẳng hàng.

Vậy, đường thẳng I'M đi qua một điểm cố định J trên (S) và là điểm đối xứng với I qua O.

c. Ta thấy ngay, mặt cầu đường kính AB luôn luôn chứa một đường tròn (C) đường kính IK nằm trong mặt phẳng β chứa IK và vuông góc với α.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Có bao nhiêu mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước ? Tìm quĩ tích tâm của các mặt cầu đó.

Bài tập 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau (Δ) và (Δ_1) có AA_1 là đoạn vuông góc chung, điểm A thuộc (Δ). Mặt phẳng (P) chứa AA_1 và vuông góc với (Δ_1). Đặt $AA_1 = a$. Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng (P) lần lượt cắt (Δ) và (Δ_1) tại M và M_1. Hình chiếu của M trên mặt phẳng (P) là H.

a. Xác định tâm O của mặt cầu (O) đi qua 5 điểm A, A_1, M, M_1, H. Tính diện tích của (O) theo a, $x = A_1M_1$ và $\varphi = (\Delta, \Delta_1)$

b. Chứng minh rằng khi x thay đổi mặt cầu (O) luôn chứa một đường tròn cố định

CHỦ ĐỀ 3

MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP VÀ LĂNG TRỤ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

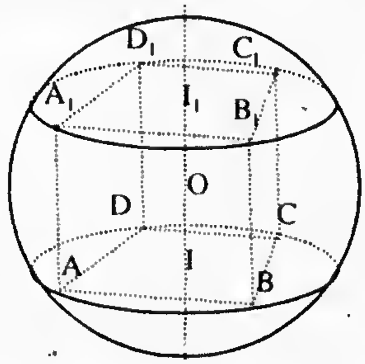
***Định nghĩa**: Một mặt cầu gọi là ngoại tiếp hình chóp (hoặc hình lăng trụ) nếu nó đi qua mọi đỉnh của hình chóp đó (hoặc hình lăng trụ đó).*

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

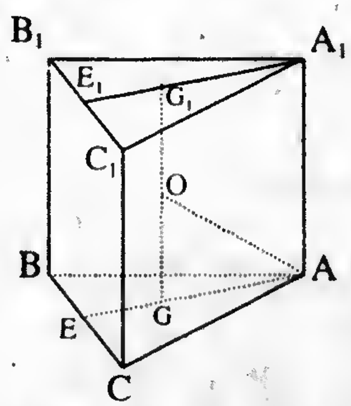
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ đứng có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là trung điểm của đoạn thẳng nối tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy.



<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = b$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Giải



Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ và O là trung điểm GG_1.

Vì GG_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$OA = OB = OC,$$
$$OA_1 = OB_1 = OC_1,$$
$$OA = OA_1,$$

suy ra:

$$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1$$

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.

Trong ΔOAG, ta có:

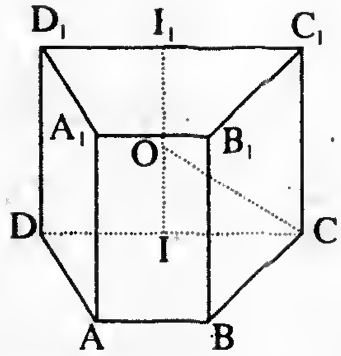
$$OA^2 = AG^2 + OG^2 = \left(\frac{2}{3}AE\right)^2 + \left(\frac{1}{2}GG_1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow OA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là $S(O, \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}})$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD nội tiếp đường tròn đường kính CD = 2a và $AA_1 = 2b$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Giải



Gọi I, I_1 theo thứ tự là trung điểm CD và C_1D_1 và O là trung điểm II_1.

Vì II_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ABCD và $A_1B_1C_1D_1$, ta có:

$$OA = OB = OC = OD,$$
$$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1,$$
$$OC = OC_1,$$

suy ra:

$$OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$$

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(O, OC) ngoại tiếp hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Trong ΔOIC, ta có:

$$OC^2 = IO^2 + IC^2 = \left(\frac{1}{3}CD\right)^2 + \left(\frac{1}{2}II_1\right)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow OC = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là S(O, $\sqrt{a^2 + b^2}$).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = 2a$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bài tập 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, AB = a, $AA_1 = b$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông tại A và AB = 3a, AC = 4a, $AA_1 = 5a$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bài tập 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b, $CC_1 = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

Bài tập 5: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'CD' có AB = 2a, $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^0$. Đường cao hình hộp là h. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp.

Bài tập 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là nửa lục giác đều đáy lớn AB = 2a và $AA_1 = 2b$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bài tập 7: Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, cạnh đáy a, đường cao h. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Bài tập 8: Cho lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Đường chéo AD_1 hợp với mặt bên (CDD_1C_1) một góc $\alpha = 30^0$. Mặt phẳng β qua AB và D_1E_1 cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích Q.

a. Chứng minh β qua các trung điểm của CC_1 và FF_1.

b. Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

c. Tính khoảng cách giữa AD_1 và BD.

Bài toán 2: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

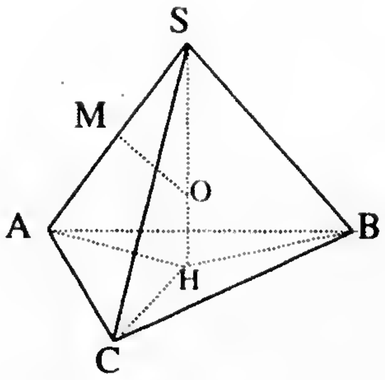
Với tứ diện SABC ta thường gặp các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu SA = SB = SC = a ta thực hiện:

Dựng SH ⊥ (ABC) giả sử SH = h, suy ra:

HA = HB = HC

⇔ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Trong ΔSAH dựng đường trung trực của SA cắt SH tại O, ta được:

OA = OB = OC = OS

⇔ mặt cầu S(O, OS) ngoại tiếp tứ diện.

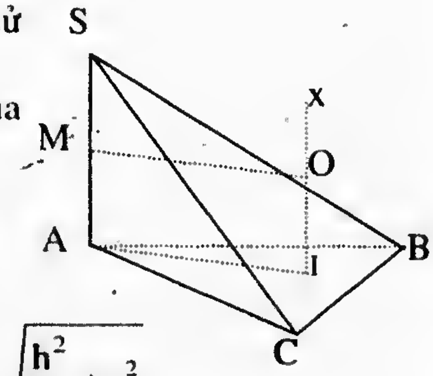
Vì ΔSMO và ΔSHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OS}{SA} = \frac{SM}{SH} \Rightarrow R = OS = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{a^2}{2h}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là $S(O, \frac{a^2}{2h})$.

Trường hợp 2: Nếu SA ⊥ (ABC) ta thực hiện:

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC giả sử IA = r, dựng Ix song song với SA.



Trong mặt phẳng (SA, Ix) dựng đường trung trực của SA cắt Ix tại O, ta được:

OA = OB = OC = OS

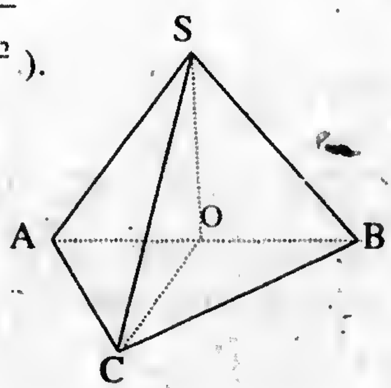
⇔ mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp tứ diện.

Trong ΔAMO vuông tại M, ta có:

$$R = OA = \sqrt{MA^2 + MO^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + IA^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là $S(O, \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2})$.

Trường hợp 3: Nếu $\widehat{ASB} = \widehat{ACB} = 90^0$ ta thực hiện:



Gọi O là trung điểm của AB, dựa trên tính chất trung tuyến của tam giác vuông suy ra:

OS = OA = OB = OC

⇔ mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp tứ diện.

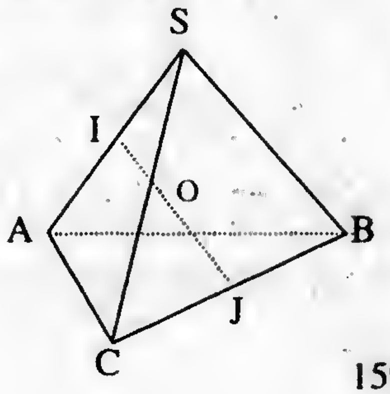
Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là $S(O, \frac{AB}{2})$.

Trường hợp 4: Nếu SA và BC có đoạn trung trực chung IJ ta thực hiện:

Giả sử IJ = d, SA = a và BC = b.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC, ta có:

$$\begin{cases} O \in IJ \\ OA^2 = OC^2 \end{cases}$$



Đặt OI = x, ta biến đổi điều kiện $OA^2 = OC^2$ thành:

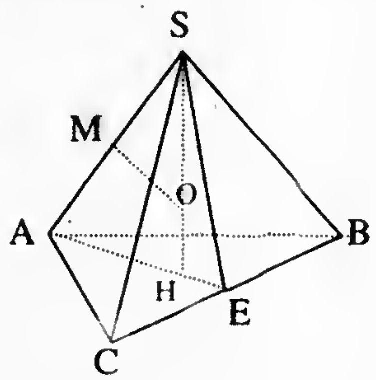
$IA^2 + IO^2 = JC^2 + JO^2$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + x^2 = \frac{b^2}{4} + (d - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{b^2 - a^2 + 4d^2}{8d}. \quad (*)$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là S(O, $\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$) với x thoả mãn (*).

<u>Ví dụ 1:</u> Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc φ. Xác định tâm bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Dựng SH ⊥ (ABC), suy ra:

HA = HB = HC

⇔ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong ΔSAH dựng đường trung trực của SA cắt SH tại O, ta được:

OA = OB = OC = OS

⇔ mặt cầu S(O, OS) ngoại tiếp tứ diện.

Vì ΔSMO và ΔSHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OS}{SA} = \frac{SM}{SH} \Rightarrow OS = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}. \quad (1)$$

Gọi E là trung điểm của BC, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SE \in (SBC) \\ BC \perp AE \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{SEA} \text{ là góc giữa mặt bên và đáy} \Rightarrow \widehat{SEA} = \varphi.$$

Trong ΔABC đều cạnh a, ta có:

$$AE = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad HE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Trong ΔSHE vuông tại H, ta có:

$$SH = HE.tg\widehat{SEH} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.tg\varphi. \quad (2)$$

Trong ΔSHA vuông tại H, ta có:

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \frac{3a^2}{36}.tg^2\varphi + \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{12}(tg^2\varphi + 4). \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

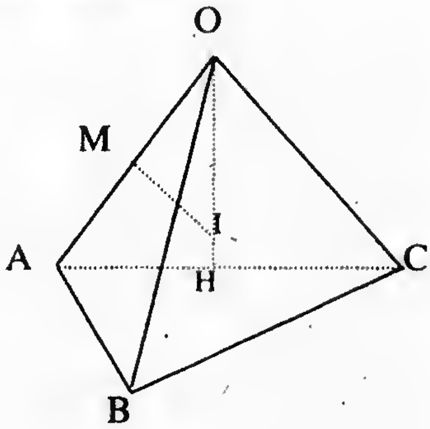
$$R = OS = \frac{\frac{a^2}{12}(tg^2\varphi + 4)}{2.\frac{a\sqrt{3}}{6}.tg\varphi} = \frac{a\sqrt{3}(tg^2\varphi + 4)}{12tg\varphi}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC là S(O, $\frac{a\sqrt{3}(tg^2\varphi + 4)}{12tg\varphi}$).

Ví dụ 2: Cho tứ diện OABC có $\widehat{AOB} = 90^0$, $\widehat{BOC} = 60^0$, $\widehat{COA} = 120^0$ và OA = OB = OC = a.

a. Có nhận xét gì về ΔABC ?
b. Chỉ rõ vị trí hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC).
c. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải



a. Trong ΔOAB vuông cân tại O, ta có:

$$AB = OA\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Trong ΔOBC cân tại O và có góc $\widehat{BOC} = 60^0$ nên:

$$BC = OB = a.$$

Trong ΔOAC cân tại O, ta có:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA.OC.\cos\widehat{COA}$$
$$= 2a^2 - 2a^2.\cos 120^0 = 3a^2$$
$$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Từ đó, nhận xét rằng:

$$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại } B.$$

b. Gọi H là trung điểm của AC, ta có:

$$\begin{cases} OA = OB = OC \\ HA = HB = HC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC)$$

tức là, H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC).

c. Trong ΔOAH dựng đường trung trực của OA cắt OH tại I, ta được:

$$IA = IB = IC = IO \Leftrightarrow \text{mặt cầu } S(I, IO) \text{ ngoại tiếp tứ diện.}$$

Vì ΔMOI và ΔHOA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{OI}{OA} = \frac{OM}{OH} \Rightarrow OI = \frac{OA.\frac{OA}{2}}{OH} = a.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là S(I, a).

Ví dụ 3: Cho ΔABC cân tại A, $\widehat{BAC} = 120^0$ và đường cao $AH = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy hai điểm I, J ở hai bên điểm A sao cho ΔIBC đều và ΔJBC vuông cân.

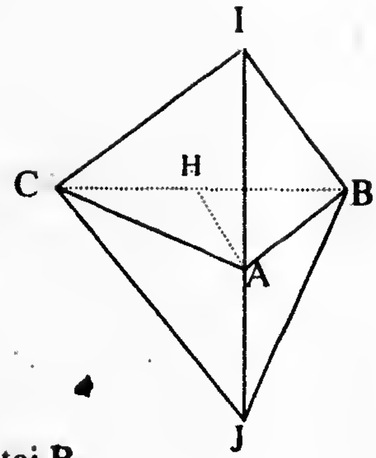
a. Tính các cạnh của ΔABC.
b. Tính AI, AJ và chứng minh các tam giác BIJ, CIJ là tam giác vuông.
c. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện IJBC.
d. Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện IABC

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\widehat{CAH} = 60^0, \widehat{ACH} = 30^0,$$
$$AB = AC = 2AH = 2a\sqrt{2},$$
$$BC = 2CH = 2AH.\text{tg}\widehat{CAH} = 2a\sqrt{2}.\text{tg}60^0 = 2a\sqrt{6}.$$

b. Ta có ngay:



$IB = IC = BC = 2a\sqrt{6}$, vì ΔIBC đều,

$JB = JC = \dfrac{BC\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{3}$, vì ΔJBC vuông cân.

Trong ΔAIC vuông tại A, ta có:

$AI^2 = IC^2 - AC^2 = 24a^2 - 8a^2 = 16a^2 \Rightarrow AI = 4a.$

Trong ΔAJC vuông tại A, ta có:

$AJ^2 = JC^2 - AC^2 = 12a^2 - 8a^2 = 4a^2 \Rightarrow AI = 2a.$

Nhận xét rằng:

$IB^2 + JB^2 = 24a^2 + 12a^2 = 36a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta BIJ$ vuông tại B.

$IC^2 + JC^2 = 24a^2 + 12a^2 = 36a^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta CIJ$ vuông tại C.

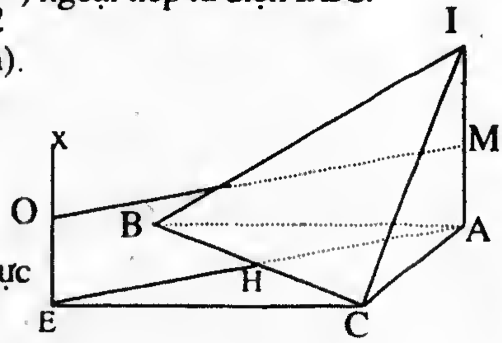
c. Dựa trên kết quả câu b), ta có:

$\widehat{IBJ} = \widehat{ICJ} = 90^0$

nên nếu gọi O_1 là trung điểm của IJ thì mặt cầu $S(O_1, \dfrac{IJ}{2})$ ngoại tiếp tứ diện IJBC.

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IJBC là $S(O_1, 3a)$.

d. Gọi E là điểm đối xứng với A qua H, ta có:



$EB = EC = 2EH = EA$

$\Rightarrow$ E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC,

dựng Ex song song với IA.

Trong mặt phẳng (IA, Ex) dựng đường trung trực của IA cắt Ex tại O, ta được:

$OA = OB = OC = OI$

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(O, OA) ngoại tiếp tứ diện IABC.

Trong ΔOEA vuông tại M, ta có:

$$OA = \sqrt{OE^2 + EA^2} = \sqrt{\left(\frac{IA}{2}\right)^2 + (2AH)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 8a^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC là $S(O, 2a\sqrt{3})$.

<u>Ví dụ 4:</u> Một đoạn thẳng IJ có chiều dài d. Trên đường vuông góc với IJ tại I ta lấy 2 điểm A, A_1 đối xứng qua I với $IA = IA_1 = a$. Trên đường vuông góc với IJ tại J và không song song với AA_1 ta lấy hai điểm B, B_1 đối xứng qua J với $JB_1 = JB = b$.

a. Chứng minh rằng tâm O của hình cầu ngoại tiếp tứ diện AA_1B_1B nằm trên đường thẳng IJ.

b. Xác định tâm và tính bán kính của hình cầu ngoại tiếp tứ diện AA_1B_1B theo a, b, c.

Giải

a. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AA_1B_1B, ta có:

$OA = OA_1 \Rightarrow$ O thuộc mặt phẳng trung trực α của AA_1 và $IJ \in \alpha$

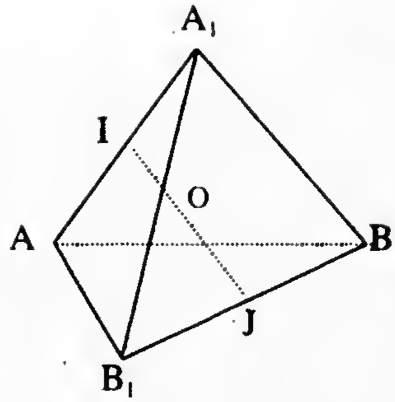
$OB = OB_1 \Rightarrow$ O thuộc mặt phẳng trung trực β của BB_1 và $IJ \in \beta$

suy ra: $O \in \alpha \cap \beta = IJ$.

Vậy, tâm O của hình cầu ngoại tiếp tứ diện AA_1B_1B nằm trên đường thẳng IJ.

b. Ta có:

$$\begin{cases} O \in IJ \\ OA^2 = OB^2 \end{cases}$$



Đặt OI = x, ta biến đổi điều kiện $OA^2 = OB^2$ thành:

$$IA^2 + IO^2 = JB^2 + JO^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + x^2 = b^2 + (d - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d}.$$

Khi đó, bán kính OA của mặt cầu có giá trị:

$$OA = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d}\right)^2}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện AA_1B_1B là $S\left(O, \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d}\right)^2}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho tứ diện đều SABC cạnh a, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (ABC).

a. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Tính SH.
b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
c. Gọi K là trung điểm SH. Chứng minh rằng KA, KB, KC đôi một vuông góc với nhau.

Bài tập 2: Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều SABC, biết:

a. Cạnh đáy a, chiều cao bằng 2a.
b. Cạnh đáy a, cạnh bên b.
c. Cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy một góc φ.

Bài tập 3: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Đặt OA = a, OB = b, OC = c.

a. Xác định tâm I và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC theo a, b, c.
b. Chứng minh rằng I, O và trọng tâm ΔABC là ba điểm thẳng hàng.

Bài tập 4: Cho tứ diện S.ABC có SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), AB = AC = b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau:

a. $\widehat{BAC} = 60^0$.
b. $\widehat{BAC} = 120^0$.

Bài tập 5: Một hình tứ diện có các cạnh đối bằng nhau. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó là trọng tâm của tứ diện. Chứng minh rằng tâm mặt cầu đó cách đều bốn mặt của tứ diện.

Bài tập 6: Cho tứ diện ABCD có CD = 2a và các tam giác ABC, ABD đều cạnh a. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện

Bài tập 7: Trong mặt phẳng (α), cho đường tròn đường kính AB = 2R. M là một điểm di động trên đường tròn, MH vuông góc với AB tại H, với AH = x, với $0 < x < 2R$. Dựng đường thẳng vuông góc với (α) tại M trên đó lấy MS = MH.

a. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABM.

b. Tính x để bán kính đó đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 8: Cho 2 tia Ax, By vuông góc với nhau và nhận đoạn AB = k làm đoạn vuông góc chung. Trên Ax lấy điểm M, trên By lấy điểm N, đặt AM = x, BN = y.

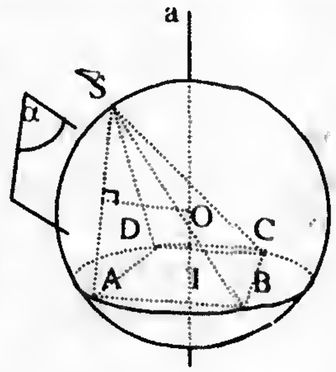
a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN.

b. Giả sử M chạy trên Ax, N chạy trên By sao cho ta luôn luôn có MN = AM + BN. Chứng minh rằng MN luôn luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB.

c. Với điều kiện trong câu b) hãy xác định x vày sao cho tứ diện ABMN có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Bài toán 3: Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG



Trước hết chúng ta cần biết:

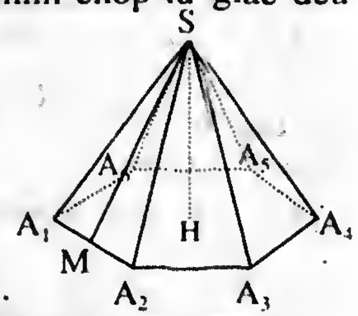
1. Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó có đường tròn ngoại tiếp.
2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cách đều tất cả các đỉnh một đoạn bằng R. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao của trục đường tròn ngoại tiếp một đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.

__Ví dụ 1:__

a. Chứng minh rằng hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì có mặt cầu ngoại tiếp.

b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.

Giải



a. Với hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ có $SA_1 = SA_2 = ... = SA_n$, gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy, suy ra:

$HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$

$\Leftrightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$

$\Rightarrow$ SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.

Khi đó, trong ΔSHA_1 dựng đường trung trực của SA_1 cắt SH tại O, ta được:

$OA_1 = OA_2 = ... = OA_n = OS$

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(O, OS) ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Vậy, hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì có mặt cầu ngoại tiếp.

b. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, suy ra:

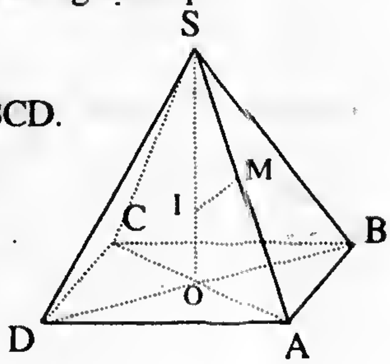
$SO \perp (ABCD)$

suy ra SO = h là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Trong ΔSAO dựng đường trung trực của SA cắt SO tại I, ta được:

IA = IB = IC = IS

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(I, IS) ngoại tiếp hình chóp.



Vì ΔSMI và ΔSOA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow IS = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{SO^2 + OA^2}{2SO} = \frac{a^2 + 2h^2}{4h}.$$

Vậy, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S(I, \frac{a^2 + 2h^2}{4h})$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = a, SA = b và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Giải

Gọi I là trung điểm AB, dựng Ix song song với SA suy ra:

Ix là trục đường tròn ngoại tiếp ABCD.

$Ix \cap SB = O$, O là trung điểm SB.

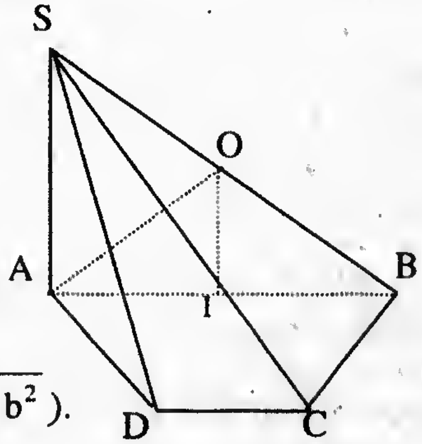
Ta có nhận xét:

OA = OB = OC = OD = OS

$\Leftrightarrow$ mặt cầu S(O, OS) ngoại tiếp hình chóp.

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$OS = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$



Vậy, mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S(O, \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2})$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD, biết:

a. Cạnh đáy a, chiều cao bằng 2a.
b. Cạnh đáy a, cạnh bên b.
c. Cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc φ.
d. Cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy một góc φ.

Bài tập 2: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên đường vuông góc với mặt phẳng (ABCD) dựng từ tâm O của hình vuông , lấy điểm S sao cho $OS = \frac{a}{2}$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Bài tập 3: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

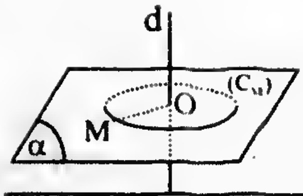
a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
b. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp).
c. Chứng minh rằng tâm hai mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^0$.

Bài tập 4: Cho tứ giác lồi ABCD có AB = 2a, $BC = AC = a\sqrt{2}$, AD = a và $BD = a\sqrt{3}$. Trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) chứa AB lấy điểm S sao cho ΔSAB đều. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD.

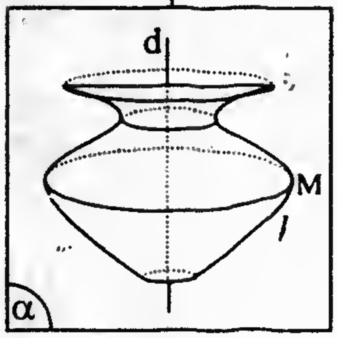
CHỦ ĐỀ 4
MẶT TRÒN XOAY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM MẶT TRÒN XOAY

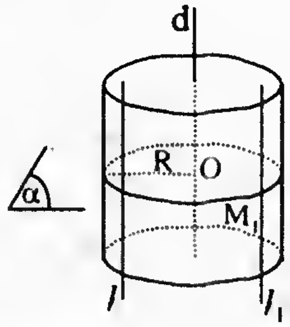


***Định nghĩa 1**: Trong không gian cho đường thẳng* d *và một điểm* M*, gọi* O *là hình chiếu vuông góc của* M *lên* d*. Đường tròn* (C_M) *có tâm* O *bán kính* OM *nằm trên mặt phẳng* α *vuông góc với* d *tại* O *được gọi là đường tròn sinh bởi điểm* M *khi* M *quay quanh* d.



***Định nghĩa 2**: Trong mặt phẳng* α *cho đường thẳng* d *và một đường* l *nào đó. Với mỗi điểm* M *nằm trên* l *ta lấy đường tròn* (C_M) *sinh bởi điểm* M *khi quay quanh* d. *Hình* (T) *gồm tất cả các đường tròn* (C_M) *với* M *thuộc* l *được gọi là mặt tròn xoay sinh bởi đường* l *khi quay quanh* d.

2. MẶT TRỤ TRÒN XOAY – HÌNH TRỤ TRÒN XOAY



***Định nghĩa 3**: Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng* l *khi quay quanh* d *(*l *song song với* d*) gọi là mặt trụ tròn xoay (hay vắn tắt là mặt trụ).*

Khi đó:

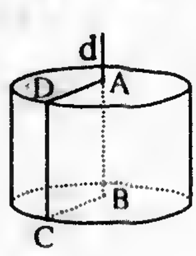
- d gọi là *trục* của mặt trụ.
- l gọi là *đường sinh* của mặt trụ.

Nhận xét rằng:

a. Nếu cắt mặt trụ bởi một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với d thì thiết diện nhận được là một đường tròn có tâm thuộc d và bán kính bằng R, người ta cũng gọi R là bán kính của mặt trụ.

b. Mặt trụ nói trên có thể định nghĩa như là tập hợp tất cả những điểm M cách đường thẳng d cố định một độ dài R không đổi.

c. Nếu M_1 là một điểm bất kì nằm trên mặt trụ thì đường thẳng l_1 qua M_1 và song song với d sẽ nằm trên mặt trụ.



***Định nghĩa 4**: Hình trụ tròn xoay là hình sinh bởi một hình chữ nhật quay một vòng quanh một cạnh.*

Chú ý: Các thiết diện qua trục của một hình trụ là các hình chữ nhật bằng nhau.

3. MẶT NÓN TRÒN XOAY – HÌNH NÓN TRÒN XOAY

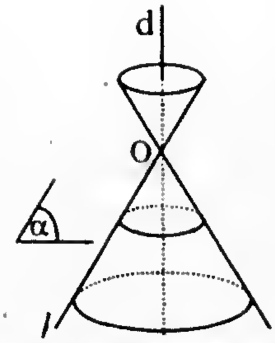
***Định nghĩa 5**: Cho hai đường thẳng* l *và* d *cắt nhau tại* O *và tạo thành một góc* φ, *trong đó* $0 < \varphi < 90^0$. *Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng* l *khi quay quanh* d *gọi là mặt nón tròn xoay (hay vắn tắt là mặt nón).*

Khi đó:

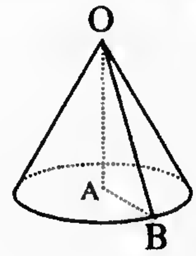
- d gọi là *trục* của mặt nón.
- l gọi là *đường sinh* của mặt nón.

- Điểm O gọi là *đỉnh* của mặt nón.

Nhận xét rằng:



a. Nếu cắt mặt nón bởi một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với d thì thiết diện nhận được là một đường tròn có tâm thuộc d và bán kính thay đổi khi mặt phẳng thiết diện thay đổi.
b. Nếu M là một điểm bất kì nằm trên mặt nón và khác O thì đường thẳng OM nằm trên mặt nón.
c. Mọi mặt phẳng đi qua d cắt mặt nón theo hai đường sinh tạo với nhau góc 2φ. Góc 2φ gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

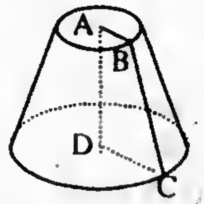


Định nghĩa 4: *Hình nón tròn xoay là hình sinh bởi một tam giác vuông quay một vòng quanh một cạnh góc vuông.*

Chú ý: Các thiết diện qua trục của một hình trụ là các tam giác cân bằng nhau.

4. HÌNH NÓN CỤT TRÒN XOAY

Ta có:



a. Hình nón cụt là phần của hình nón giới hạn bởi mặt đáy và một thiết diện song song với đáy.
b. Hình nón cụt có thể tạo thành bởi một hình thang vuông quay một vòng quanh cạnh góc vuông.

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Hình trụ.

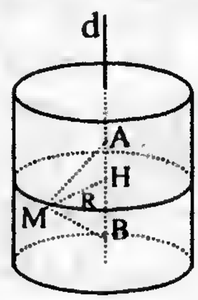
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. *Với bài toán quĩ tích*: Nếu một điểm M di động trong không gian có:
   a. Hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng α là điểm M' di động trên một dường tròn (C) cố định thì M thuộc mặt trụ cố định ($\mathcal{T}$) chứa (C) và có trục đi qua tâm của đường tròn (C) và vuông góc với α.
   b. Khoảng cách từ M tới đường thẳng d cố định bằng h không đổi thì M thuộc mặt trụ cố định ($\mathcal{T}$) trục d và bán kính bằng h.
2. *Với bài toán định tính và định lượng*: Để giải các bài toán định tính và định lượng về hình trụ ta thường dùng phép chiếu vuông góc xuống mặt đáy rồi sử dụng các tính chất hình học phẳng của đường tròn đáy để thực hiện.

__Ví dụ 1:__ Cho hai điểm A, B cố định, AB = a. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian sao cho diện tích tam giác MAB bằng S không đổi.

Giải

Gọi khoảng cách từ M tới AB là d(M, AB), ta có:

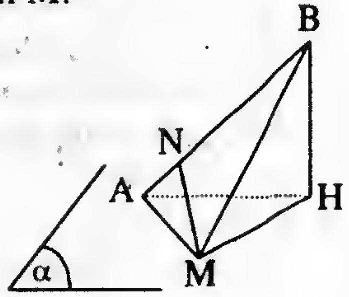


$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}.AB.d(M, AB) \Leftrightarrow S = \frac{1}{2}.a.d(M, AB)$$

$$\Leftrightarrow d(M, AB) = \frac{2S}{a}, \text{ không đổi}$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt trụ ($\mathcal{T}$) trục AB và bán kính $R = \dfrac{2S}{a}$.

Ví dụ 2: Cho mặt phẳng α, một điểm A nằm trên α, một điểm B nằm ngoài α sao cho hình chiếu vuông góc H của B trên α không trùng với A. Một điểm M chạy trong α sao cho luôn có $\widehat{ABM} = \widehat{BMH}$. Tìm tập hợp điểm M.



Giải

Gọi N là hình chiếu vuông góc của M lên AB.

Xét hai tam giác vuông ΔMBN và ΔBMH, ta có:

BM chung

MBN= BMH

suy ra:

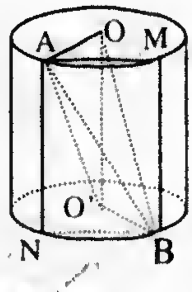
$\Delta BMN = \Delta BMH \Rightarrow MN = BH$, không đổi

$\Rightarrow$ M thuộc mặt trụ ($\mathcal{T}$) trục AB và bán kính R = BH.

Vậy, tập hợp điểm M thuộc giao tuyến của mặt phẳng α với mặt trụ ($\mathcal{T}$).

Ví dụ 3: Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, có đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn (O), B là một điểm trên đường tròn (O') sao cho OA vuông góc với O'B. Gọi α là mặt phẳng qua AB và song song với OO'.

a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp OABO' là những tam giác vuông.
b. Tính khoảng cách giữa OO' và α.
c. Tính diện tích thiết diện.



Giải

a. Ta có:

$OO' \perp (O) \Rightarrow OO' \perp OA \Rightarrow \Delta OO'A$ vuông,

$OO' \perp (O') \Rightarrow OO' \perp O'B \Rightarrow \Delta OO'B$ vuông,

$\begin{cases} OA \perp OO' \\ OA \perp O'B \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OO'B) \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow \Delta OAB$ vuông,

$\begin{cases} O'B \perp OO' \\ O'B \perp OA \end{cases} \Rightarrow O'B \perp (OO'A) \Rightarrow O'B \perp O'A \Rightarrow \Delta O'AB$ vuông.

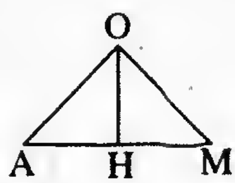
Vậy, các mặt bên của hình chóp OABO' là những tam giác vuông.

b. Dựng Ax // OO' cắt (O') tại N và dựng By // OO' cắt (O) tại M. Ta nhận được thiết diện là hình chữ nhật AMBN.

Hạ $OH \perp AM$, ta có nhận xét:

$d(\widehat{OO',\alpha}) = d(\widehat{O,\alpha}) = OH$

Trong ΔOAM vuông cân tại O, ta có:



$AM = OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$

$AH = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

c. Ta có:

$S_{AMBN} = AM.AN = AM.OO' = R\sqrt{2}.R\sqrt{2} = 2R^2$.

<u>**Ví dụ 4:**</u> Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, có đường cao $R\sqrt{3}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn (O), B là một điểm trên đường tròn (O') sao cho góc hợp bởi AB và trục của hình trụ bằng 30^0.

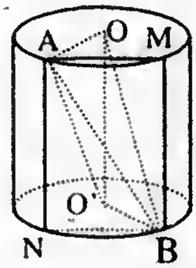
a. Tính điện tích thiết điện qua AB và song song với OO'.
b. Tính góc giữa hai bán kính đáy qua A và B.
c. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và OO'.

Giải

a. Dựng Ax // OO' cắt (O') tại N và dựng By // OO' cắt (O) tại M. Ta nhận được thiết điện là hình chữ nhật AMBN.

Ta có:

$$(\widehat{AB,OO'}) = 30^0 \Leftrightarrow \widehat{ABN} = 30^0.$$



Trong ΔABN vuông tại N, ta có:

$$BN = AN.\text{cotg}\,\widehat{ABN} = OO'.\text{cotg}30^0 = R\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3R.$$

Ta có:

$$S_{AMBN} = AN.BN = R\sqrt{3}.3R = 3R^2\sqrt{3}.$$

b. Ta có:

$$(\widehat{OA,O'B}) = (\widehat{OA,OM}) = \widehat{AOM}.$$

Trong $\Delta OABM$, ta có:

$$\cos\widehat{AOM} = \frac{OA^2 + OM^2 - AM^2}{2OA.OM} = \frac{2R^2 - (3R)^2}{2R^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AOM} = 120^0.$$

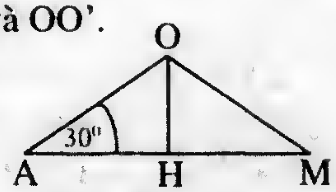
c. Ta thực hiện:

- Hạ OH ⊥ AM, dựng Hz // AN và cắt AB tại E.
- Dựng Et // OH và cắt OO' tại F.

Khi đó EF chính là đoạn vuông góc chung của AB và OO'.

Trong ΔOAH vuông tại H, ta có:

$$EF = OH = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}.$$



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho một đường tròn (C) trong mặt phẳng α. Từ một điểm M trên (C) ta kẻ đường thẳng m vuông góc với α. Chứng minh rằng những đường thẳng m như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay.

Bài tập 2: Cho đường thẳng a cố định, b là đường thẳng di động nhưng luôn đi qua điểm cố định B. Gọi MN là đoạn vuông góc chung của a và b với M thuộc b. Chứng minh rằng điểm M luôn thuộc một mặt cong cố định.

Bài tập 3: Cho một hình trụ có trục OO', bán kính đáy là R. Một điểm S cố định cách OO' một đoạn là a. Một đường thẳng d di động nhưng luôn qua S và cắt mặt trụ tại M và N.

a. Chứng minh rằng trung điểm I của MN luôn thuộc một mặt trụ cố định.
b. Giả sử d luôn hợp với OO' một góc φ. Chứng minh rằng SM. SN không đổi.

Bài tập 4: Một khối trụ có bán kính đáy R, chiều cao h. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trụ một đoạn bằng a, với $0 < a < R$. Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 5: Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' có hai điểm di động A, B sao cho $(\widehat{OA, O'B}) = \varphi$ không đổi.

a. Tính AB theo R và φ.

b. Dựng đoạn thẳng vuông góc chung IK của AB và OO' với $I \in AB$.

c. Chứng minh rằng khi AB di động I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài tập 6: Cho một hình trụ có tâm của hai đáy là O và O'. M là một điểm ở ngoài hình trụ. Qua M dựng 2 mặt phẳng α và β tiếp xúc với mặt trụ theo các đường sinh AB và CD. Gọi Δ là giao tuyến của α và β. Chứng minh rằng:

a. Δ vuông góc với đáy hình trụ.

b. Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (OO'M).

Bài tập 7: Trên các đường tròn đáy của một hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy R, người ta lấy theo thứ tự các điểm A và B. Xác định khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ trong các trường hợp:

a. $AB = \frac{3h}{2}$.

b. Góc giữa AB và mặt đáy là φ.

Bài tập 8: Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, có đường cao $R\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm cố định trên đường tròn (O). Tìm hai điểm B, C trên đường tròn (O') sao cho ABC là tam giác đều.

Bài toán 2: Hình nón – Hình nón cụt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. *Với bài toán quĩ tích:* Để chứng minh một đường thẳng *l* di động nhưng luôn thuộc một mặt nón tròn xoay cố định ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chứng minh *l* đi qua điểm cố định O thuộc đường thẳng d cố định.

Bước 2: Chứng minh $(\widehat{l, d}) = \varphi$ không đổi.

Bước 3: Vậy, đường thẳng *l* thuộc mặt nón (*N*) trục d đỉnh O và góc ở đỉnh bằng 2φ.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chứng minh *l* đi qua điểm cố định O.

Bước 2: Chứng minh *l* luôn cắt một đường tròn (C) cố định có trục đi qua điểm O.

Bước 3: Suy ra *l* luôn thuộc mặt nón tròn xoay có đỉnh O và đường chuẩn là (C).

2. *Với bài toán định tính và định lượng:* Để giải các bài toán định tính và định lượng về hình nón ta thường dùng phép chiếu vuông góc xuống mặt đáy rồi

sử dụng các tính chất hình học phẳng của đường tròn đáy và của tam giác vuông, tam giác cân để thực hiện.

Ví dụ 1: Cho hai điểm A, B cố định, AB = a. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua A, không vuông góc với AB và cách B một đoạn không đổi đ. Chứng tỏ l luôn nằm trên một mặt nón.

Giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên l suy ra BH = d, đặt $\varphi = \widehat{BAH}$, $\varphi < 90^0$.

Trong ΔHAB vuông tại H, ta có:

$$\sin\varphi = \frac{BH}{AB} = \frac{đ}{a}\text{, không đổi}$$

Vậy, đường thẳng l (đi qua điểm A cố định) thuộc mặt nón ($\mathcal{N}$) trục AB đỉnh A và góc ở đỉnh bằng 2φ.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng α cho một góc xOy = 2φ. Một mặt phẳng β thay đổi luôn vuông góc với đường phân giác của góc xOy cắt Ox, Oy tại A và B. Trong mặt phẳng β lấy điểm M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Chứng minh rằng các điểm M luôn nằm trên một mặt nón xác định.

Giải

Giả sử Oz là tia phân giác của góc xOy, Oz cắt AB tại H, suy ra:

OH $\perp$ AB, vì ΔOAB cân tại O $\Rightarrow$ OH $\perp \beta \Rightarrow$ OH $\perp$ HM.

Xét hai tam giác vuông ΔOHM và ΔOHB, ta có:

OH chung

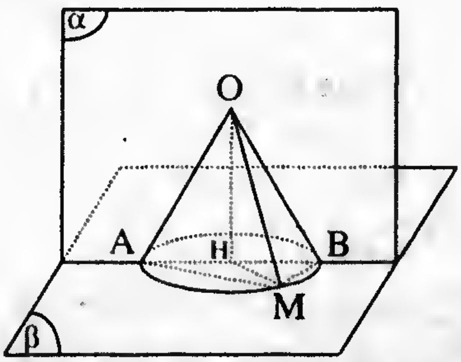
HM= HB

suy ra:

$\Delta OHM = \Delta OHB$

$\Rightarrow \widehat{MOH} = \widehat{BOH} = \varphi$, không đổi

Vậy, M thuộc mặt nón ($\mathcal{N}$) trục Oz đỉnh O và góc ở đỉnh bằng 2φ.



Ví dụ 3: Một hình nón có bán kính đáy R và có thiết diện qua trục là một tam giác đều. Gọi A là một điểm cố định trên đường tròn đáy (O), M là một điểm di động trên (O). Đặt $\widehat{AOM} = 2\alpha$, với $0 \le \alpha \le 90^0$.

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên (SAM). Tính OH theo R và α.

b. Gọi β là góc giữa (SAM) và đáy. Chứng minh rằng $\cos\alpha.\text{tg}\beta = \sqrt{3}$. Xác định α sao cho $\text{tg}\beta = 2\text{tg}\alpha$.

c. Tìm tập hợp điểm H khi M chạy hết đường tròn (O).

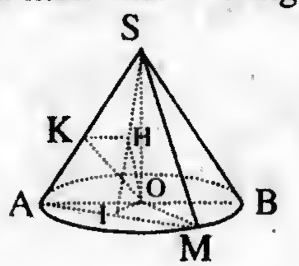
Giải

a. Hạ OI $\perp$ AM tại I.

Trong mặt phẳng (SOI) hạ OH $\perp$ SI tại H. Khi đó, H là hình chiếu vuông góc của O trên (SAM).

Vì thiết diện OAB là tam giác đều nên:

$$SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$



Trong ΔAOI vuông tại I, ta có:

$OI = OA.\cos\widehat{AOI} = R.\cos\alpha$.

Trong ΔSOI vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{(R\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(R.\cos\alpha)^2} = \frac{1}{3R^2} + \frac{1}{R^2.\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{R\sqrt{3}\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + 3}}.$$

b. Ta có ngay:

$$(\widehat{(SAM),(O)}) = \widehat{SIO} = \beta.$$

Suy ra:

$$\cos\alpha.tg\beta = \frac{OI}{OA}.\frac{OS}{OI} = \frac{OS}{OA} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3}, \text{ đpcm.}$$

Để $tg\beta = 2tg\alpha$ điều kiện là:

$$\cos\alpha.2tg\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sin\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^0.$$

Vậy, với $\alpha = 60^0$ ta được $tg\beta = 2tg\alpha$.

c. Hạ $OK \perp SA$ tại K, suy ra:

$SA \perp (OHK) \Rightarrow$ mặt phẳng (OHK) cố định

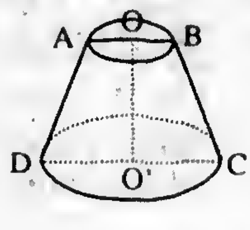
Trong mặt phẳng (OHK), ta có:

$OH \perp HK \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính OK.

Vậy, tập hợp điểm H thuộc đường tròn đường kính OK trong mặt phẳng qua O và vuông góc với SA.

Ví dụ 4: Cho hình nón cụt có các bán kính đáy R và $\frac{R}{2}$, góc giữa đường sinh và mặt đáy là α. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng chứa trục của nón cụt với nón cụt.

Giải



Ta thấy ngay thiết diện ABCD là hình thang cân và:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).OO'$$

trong đó:

$$AB = 2.\frac{R}{2} = R \text{ và } CD = 2R$$

$$OO' = \left(R - \frac{R}{2}\right).tg\alpha = \frac{R}{2}.tg\alpha$$

suy ra:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(R + 2R).\frac{R}{2}.tg\alpha = \frac{3R^2.tg\alpha}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Trong mặt phẳng α cho điểm O cố định. Xét một đường thẳng *l* thay đổi luôn đi qua O và hợp với mặt phẳng α một góc φ không đổi. Chứng minh rằng *l* luôn luôn nằm trên một mặt nón cố định.

Bài tập 2: Trong không gian cho trước hai điểm cố định S và O. Một đường thẳng d di động luôn đi qua S. Chứng minh rằng d luôn thuộc một mặt nón tròn xoay cố định $(\mathcal{N})$ nếu nó thoả một trong các điều sau:

a. d luôn cách O một đoạn bằng a không đổi.

b. d luôn hợp với SO một góc α không đổi.

Bài tập 3: Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là một hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao của hình nón bằng 2R. gọi I là một điểm nằm trên mặt đáy và cách O một đoạn bằng 2R. Trong hình tròn O kẻ bán kính OA vuông góc với OI. IA cắt đường tròn tại b.

a. M là một điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại N. Chứng minh rằng N di động trên một đoạn thẳng cố định.

b. Chứng minh rằng hình chiếu K của O trên IM di động trên một đường tròn cố định đi qua trực tâm H của ΔSAI.

Bài tập 4: Cho hình nón đỉnh S, chiều cao h và bán kính đáy R.

a. Mặt phẳng α đi qua đỉnh S cắt hình nón theo một thiết diện là hình gì ?

b. Xác định α sao cho thiết diện có diện tích lớn nhat.

Bài tập 5: Cho hình nón có bán kính đáy là R, đường sinh hợp với đáy một góc α. Tính bán kính đáy của hình trụ nội tiếp trong hình nón biết thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

Bài tập 6: Cho hình nón cụt hai đáy là các đường tròn (O), (O'), biết (O), (O') có bán kính là R và R' (R > R'). Một thiết diện đi qua điểm I thuộc OO' và song song với đáy của hình nón cụt. Tính bán kính của thiết diện biết OI = 2O'I.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài tập 1: Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau. AB = 2 là đoạn vuông góc chung và O là trung điểm của AB. Trên Ax, By lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = x, BN = y. Giả sử MN luôn luôn tiếp xúc với một hình cầu đường kính AB.

a. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y.

b. Gọi H là hình chiếu của O trên MN. Chứng minh điểm H luôn di động trên một đường tròn cố định (C) thuộc mặt phẳng (α) và MN luôn tạo với (α) một góc không đổi.

c. Gọi φ là góc hợp bởi hai đường thẳng AB và MN. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ và } tg^2\varphi = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$$

Bài tập 2: Cho trong mặt phẳng (P) một góc vuông mOn. Đoạn SO = a vuông góc với mặt phẳng (P) tại O. M, N chuyển động lần lượt trên Om và On sao cho ta luôn luôn có OM + ON = a.

a. Chứng minh rằng tổng 3 góc phẳng ở đỉnh S của tứ diện SOMN bằng 90^0.

b. Chứng minh rằng mặt phẳng (SMN) luôn luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Bài tập 3: Cho mặt cầu tâm O bán kính R, mặt phẳng (α) cách tâm O một khoảng h (0 < h < R) cắt mặt cầu theo đường tròn (C). A là một điểm cố định trên (C), CD là một đường kính di động của (C). Đường thẳng qua A vuông góc với α lại cắt mặt cầu tại B.

a. Chứng minh các tổng $AD^2 + BC^2$ và $AC^2 + BD^2$ có giá trị không đổi.

b. Với vị trí nào của CD thì diện tích ΔBCD lớn nhất ?

c. Tìm tập hợp điểm H, hình chiếu vuông góc của B trên CD.

Bài tập 4: Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' bán kính R, có đường cao 2R. Gọi I là điểm bất kì trên đáy (O') và M là điểm bất kì trên đáy (O).

a. Tìm giá trị lớn nhất của đoạn IM.

b. Giả sử I là điểm cố định trên (O') và $O'I = \frac{R}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn IM. Tìm tập hợp các điểm M biết rằng IM = l với l là độ dài cho trước. Biện luận.

Bài tập 5: Cho hình nón đường sinh l và góc ở đỉnh φ.

a. Chứng minh rằng góc giữa hai đường sinh bất kì nhỏ hơn hay bằng φ.

b. Giả sử φ = 120^0. Tính diện tích S_0 của thiết diện qua trục. Có thiết diện qua đỉnh nào, khác với thiết diện qua trục, mà có diện tích bằng S_0 không ?

CHƯƠNG V

DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

CHỦ ĐỀ 1

HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. HÌNH ĐA DIỆN

Định nghĩa: *Hình đa diện là hình gồm một số hữu hạn các miền đa giác thoả mãn hai tính chất sau:*

a. *Hai miền đa giác bất kì hoặc không có điểm chung hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.*

b. *Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác.*

2. KHỐI ĐA DIỆN

Trong phạm vi phổ thông chúng ta chỉ xét những hình da diện thoả mãn điều kiện sau:

Một hình đa diện chia không gian thành hai miền sao cho:

a. *Bất kì hai điểm nằm trong cùng một miền đều có thể nối với nhau bằng một đường gấp khúc nằm hoàn toàn trong miền đó.*

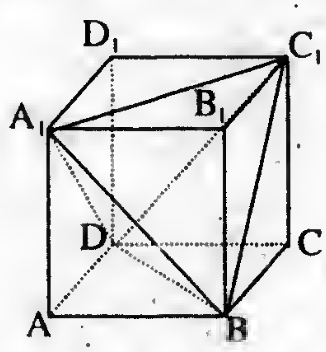
b. *Bất kì đường gấp khúc nào nối hai điểm thuộc hai miền khác nhau đều có điểm chung với hình da diện.*

Khi đó, miền chứa toàn bộ một đường thẳng được gọi là *miền ngoài*, miền còn lại được gọi là *miền trong*.

Định nghĩa: *Hình da diện cùng với miền trong của nó gọi là khối đa diện.*

II. PHÂN CHIA MỘT KHỐI ĐA DIỆN THÀNH NHIỀU KHỐI ĐA DIỆN

<u>**Ví dụ 1:**</u> Hãy chia một khối hộp thành năm khối tứ diện.



Giải

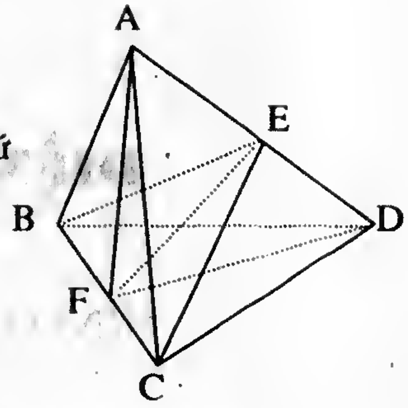
Hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được chia thành năm khối tứ diện bởi bốn mặt chéo tam giác BDA_1, BDC_1, A_1C_1B, A_1C_1D.

Khi đó, ta được năm khối tứ diện là:

$ABDA_1$, $CBDC_1$, $B_1A_1C_1B$, $D_1A_1C_1D$.

<u>**Ví dụ 2:**</u> Hãy chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bằng hai mặt phẳng.

Giải



Lấy điểm E, F theo thứ tự thuộc cạnh AD và BC.

Khi đó, hai mặt phẳng (ADF) và (BCE) chia khối tứ diện ABCD thành bốn khối tứ diện sau:

ABEF và DBEF

ACEF và DCEF.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Hãy chia một khối hình chóp tứ giác thành hai khối tứ diện.

Bài tập 2: Hãy chia một khối lăng trụ tam giác thành ba khối tứ diện.

Bài tập 3: Một khối hộp có thể chia thành tối đa bao nhiêu khối tứ diện ?

Bài tập 4: Trên ba đường thẳng song song nhưng không đồng phẳng a, b, c lần lượt lấy các đoạn AA_1, BB_1, CC_1 thoả mãn $AA_1 < BB_1 < CC_1$. Hãy chia hình đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ thành một hình chóp và một hình lăng trụ.

CHỦ ĐỀ 2

THỂ TÍCH CÁC KHỐI ĐA DIỆN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. KHÁI NIỆM VỀ THỂ TÍCH

Định nghĩa: *Thể tích của mỗi khối đa diện là một số dương có các tính chất sau:*

a. *Khối lập phương có cạnh bằng 1 thì có thể tích bằng 1.* Khối lập phương như thế gọi là *khối lập phương đơn vị.*

b. *Thể tích của hai khối đa diện bằng nhau thì bằng nhau.*

c. *Nếu một khối đa diện được phân chia thành nhiều khối đa diện thì thể tích của nó bằng tổng thể tích của các khối đa diện phân chia.*

2. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH CÁC KHỐI ĐA DIỆN

1. *Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích của ba kích thước.*

   Như vậy:

   - Với khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c thì:

     $V = abc.$

   - Khối lập phương có cạnh bằng a thì:

     $V = a^3.$

2. *Thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích đáy và chiều cao.*

   Như vậy:

   $$V = \mathscr{B}.h.$$

3. *Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ tích của diện tích đáy và chiều cao.*

   Như vậy:

   $$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}.h.$$

4. *Nếu khối chóp cụt có chiều cao h và có diện tích hai đáy là* B_1 *và* B_2 *thì thể tích V của nó là:*

   Như vậy:

   $$V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2}).h.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Thể tích của lăng trụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức:

$$V = \mathscr{B}.h.$$

Như vậy, để tính được thể tích của hình lăng trụ ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

Bước 2: Dựa vào công thức, ta phân tích V thành các biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính.

Bước 3: Tính những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng ...

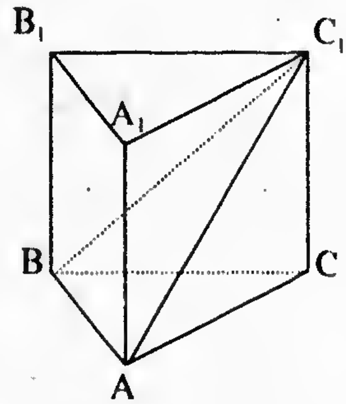
Bước 4: Suy ra giá trị của V.

Ví dụ 1: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AC = a, $\widehat{C} = 60^0$, đường chéo BC_1 của mặt bên (BCC_1B_1) hợp với mặt bên (ACC_1A_1) một góc 30^0.

a. Tính độ dài đoạn AC_1.

b. Tính thể tích lăng trụ.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACC_1A_1).$$

Vậy, ta nhận được góc $\widehat{BC_1A} = 30^0$.

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$AB = AC.tg\,\widehat{C} = a.tg60^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔABC_1 vuông tại A, ta có:

$$AC_1 = AB.cotg\,\widehat{BC_1A} = a\sqrt{3}.cotg30^0 = 3a.$$

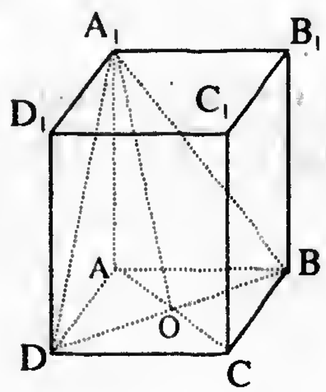
b. Trong ΔACC_1 vuông tại C, ta có:

$$CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}.$$

Thể tích V của lăng trụ được cho bởi:

$$V = S_{\Delta ABC}.CC_1 = \frac{1}{2}AB.AC.CC_1 = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a.2a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}.$$

Ví dụ 2: Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đáy là hình thoi. Biết diện tích 2 mặt chéo ACC_1A_1 và BDD_1B_1 là s_1, s_2. Biết $\widehat{BA_1D} = 90^0$. Tính thể tích hình hộp.



Giải

Đặt AC = a, BD = b, AA_1 = c, ta có ngay:

$$S_{ACC_1A_1} = AA_1.AC \Leftrightarrow ac = s_1.$$

$$S_{BDD_1B_1} = BB_1.BD \Leftrightarrow bc = s_2.$$

Thể tích V của hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ được cho bởi:

$$V = S_{ABCD}.AA_1 = \frac{1}{2}AC.BD.AA_1 = \frac{1}{2}abc = \frac{s_1.s_2}{2c}. \quad (1)$$

Trong ΔA_1BD vuông tại A_1, ta có:

$$A_1O = \frac{1}{2}BD = \frac{b}{2}.$$

Ngoài ra, trong ΔA_1AO vuông tại A, ta có:

$$A_1O^2 = A_1A^2 + AO^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} = c^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow c^4 = \frac{1}{4}(b^2c^2 - a^2c^2)$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt[4]{\frac{s_2^2 - s_1^2}{4}}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{s_1.s_2}{2\sqrt[4]{\frac{s_2^2 - s_1^2}{4}}} = \frac{s_1.s_2}{\sqrt[4]{4(s_2^2 - s_1^2)}}.$$

<u>**Ví dụ 3:**</u> Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$ đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A_1 lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn (ABC). Cạnh bên AA_1 tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0.

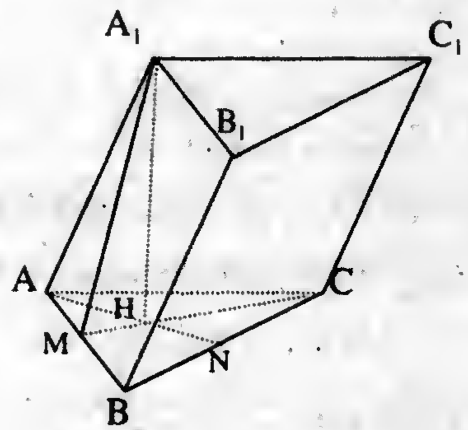
a. Tính thể tích lăng trụ.

b. Chứng minh rằng BCC_1B_1 là hình chữ nhật.

c. Tính diện tích xung quanh (tổng diện tích các mặt bên) lăng trụ.

Giải

a. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AB, BC.



Gọi H là tâm ΔABC, ta có:

$$A_1H \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A_1AH} = 60^0.$$

Thể tích V của lăng trụ được cho bởi:

$$V = S_{\Delta ABC}.A_1H \quad (1)$$

Vì ΔABC đều cạnh a nên:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \quad (2)$$

Trong ΔA_1HA vuông tại H, ta có:

$$AA_1 = 2AH = 2.\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3},$$

$$A_1H = AH.tg\widehat{A_1AH} = \frac{2}{3}AN.tg60^0 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A_1H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA_1H) \Rightarrow BC \perp AA_1.$$

Mặt khác, ta luôn có:

$AA_1 // BB_1 \Rightarrow BC \perp BB_1 \Rightarrow BCC_1B_1$ là hình chữ nhật.

c. Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh lăng trụ, ta có:

$$S_{xq} = 2S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} = 2A_1M.AB + BB_1.BC = (2A_1M + BB_1)BC.$$

Trong ΔA_1HM vuông tại H, ta có:

$$A_1M = \sqrt{A_1H^2 + MH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6},$$

Từ đó, suy ra:

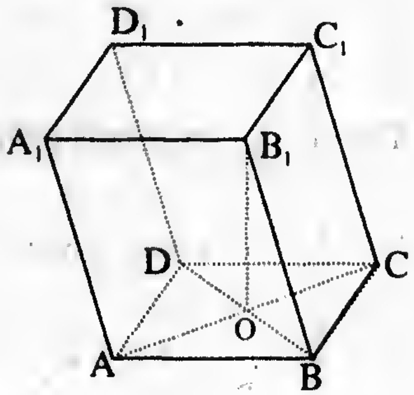
$$S_{xq} = \left(2.\frac{a\sqrt{39}}{6} + \frac{2a\sqrt{3}}{3}\right).a = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}.$$

__Ví dụ 4:__ Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$. Chân đường vuông góc hạ từ B_1 xuống đáy ABCD trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy. Cho $BB_1 = a$.

a. Tính góc giữa cạnh bên và đáy.

b. Tính thể tích hình hộp.

Giải



a. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có:

$B_1O \perp (ABCD)$.

Từ đó, suy ra góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{B_1BO}$.

Vì ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\hat{A} = 60^0$ nên:

$$BD = a \Rightarrow OB = \frac{a}{2}.$$

Trong ΔOB_1B vuông tại O, ta có:

$$OB_1 = \sqrt{BB_1^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\widehat{B_1BO}. = \frac{OB}{BB_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B_1BO}. = 60^0.$$

Vậy, góc giữa cạnh bên và đáy của lăng trụ bằng 60^0.

b. Thể tích V của lăng trụ được cho bởi:

$$V = S_{ABCD}.B_1O = \frac{1}{2}AC.BD.B_1O = \frac{1}{2}.2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho lăng trụ đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy a. Góc giữa đường chéo AC_1 và đáy là 60^0. Tính thể tích hình lăng trụ.

Bài tập 2: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường cao h. Mặt phẳng (A_1BD) hợp với mặt bên (ABB_1A_1) một góc α. Tính thể tích của lăng trụ.

Bài tập 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. $A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, AB hợp với mặt phẳng (A'B'CB) một góc α và $\widehat{BAC'} = \beta$. Tính thể tích hình hộp.

Bài tập 4: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$, cạnh đáy a. Mặt phẳng (ABC_1) hợp với mặt phẳng (BCC_1B_1) một góc α. Gọi I, J là hình bình chiếu của A lên BC và BC_1.

a. Chứng minh $\widehat{AIJ} = \alpha$.

b. Tính thể tích hình lăng trụ.

Bài tập 5: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$, cạnh đáy bằng a, đường chéo BC_1 của mặt bên (BCC_1B_1) hợp với mặt bên (ABB_1A_1) một góc α.

a. Xác định góc α.

b. Tính thể tích lăng trụ. Tìm điều kiện của α để lăng trụ tồn tại.

Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$, đáy ABC là tam giác cân đỉnh A. Góc giữa AA_1 và BC_1 là 30^0 và khoảng cách giữa chúng là a. Góc giữa 2 mặt bên qua AA_1 là 60^0. Tính thể tích lăng trụ.

Bài tập 7: Cho lăng trụ đều $ABC.A_1B_1C_1$. Mặt phẳng (A_1BC) cách A một khoảng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ và hợp với BC' một góc α biết $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$. Tính thể tích lăng trụ.

Bài tập 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AC = b, Ë $= \alpha$. Đường chéo BC_1 tạo với mặt bên ACC_1A_1 một góc β.

a. Tính thể tích lăng trụ.

b. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của lăng trụ và tính khoảng cách ấy.

Bài tập 9: Cho lăng trụ xiên $ABC.A_1B_1C_1$ đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A_1 lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn (ABC). Cho $BAA_1 = 45^0$. Tính thể tích lăng trụ.

Bài tập 10: Cho lăng trụ xiên $ABC.A_1B_1C_1$ đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A. Mặt bên (ABB_1A_1) là hình thoi cạnh a, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên (ACC_1A_1) hợp với đáy một góc α. Tính thể tích lăng trụ.

Bài tập 11: Cho lăng trụ xiên $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Mặt bên ABB_1A_1 là hình thoi, mặt bên BCC_1B_1 nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này hợp với nhau một góc α.

b. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCC_1B_1). Xác định góc α.

c. Tính thể tích lăng trụ.

Bài toán 2: Thể tích của tứ diện và hình chóp.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức:

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}.h.$$

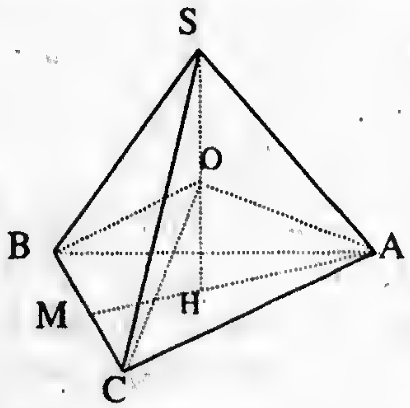
<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho tứ diện đều SABC có cạnh a. Dựng đường cao SH.

a. Chứng minh SA ⊥ BC.

b. Tính thể tích của hình chóp SABC.

c. Gọi O là trung điểm của SH. Chứng minh rằng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

Giải



a. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA.$$

b. Ta có:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH.$$

Ta có ngay:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \text{ vì } \Delta ABC \text{ là tam giác đều cạnh a}$$

Trong ΔSHA vuông tại H, ta có:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy, thể tích của hình chóp SABC là

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c. Trong ΔOHA vuông tại H, ta có:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2 = \left(\frac{1}{2}SH\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow OA = OB = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Từ đó, nhận thấy rằng:

$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow OA \perp OB,$

$OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow CB \perp OC,$

$OA^2 + OC^2 = AC^2 \Rightarrow OA \perp OC.$

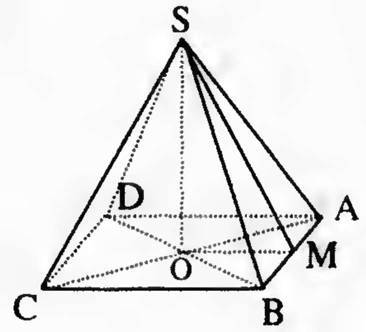
Vậy OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

Ví dụ 2: Tính thể tích hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và góc $\widehat{ASB} = \alpha$.

Giải

Gọi O là tâm của đáy ABCD và M là trung điểm AB.

Ta có:



$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO.$$

Ta có ngay:

$S_{ABCD} = a^2$, vì ABCD là hình vuông cạnh a

Trong ΔSMA vuông tại M, ta có:

$$SM = AM.\text{cotg}\,\widehat{ASM} = \frac{a}{2}.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \left(\frac{a}{2}.\text{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}\left(\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{2}\sqrt{\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Vậy, thể tích của hình chóp SABCD là:

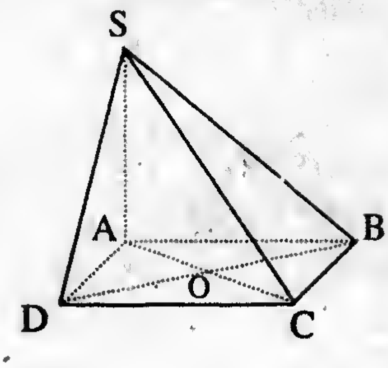
$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}\sqrt{\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a^3}{6}\sqrt{\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có cạnh AB = a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SC hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên (SAB) một góc β.

a. Tính SC.

b. Tính thể tích hình chóp.

Giải



Từ giả thiết:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SCA} = \alpha.$

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{BSC} = \beta.$$

a. Đặt AD = b, ta có AC = $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta đi tính SC lần lượt trong hai tam giác SAC và SBC, ta được:

$$SC = \frac{AC}{\cos SCA} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos\alpha} \text{ và } SC = \frac{BC}{\sin BSC} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow b^2\left(\frac{1}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{a^2.\sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \Rightarrow b = \frac{a.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

Từ đó, ta được:

$$SC^2 = \frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

b. Ta có:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA.$$

trong đó:

$$S_{ABCD} = a.b = \frac{a^2.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}, \text{ vì ABCD là hình chữ nhật}$$

$$SA = SC.\sin SCA = \frac{a.\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

Vậy, thể tích của hình chóp SABCD là:

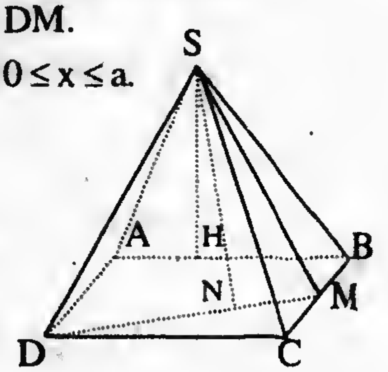
$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^2.\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.\frac{a.\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}} = \frac{a^2\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$

<u>**Ví dụ 4:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB và M là một di động trên đường thẳng BC.

a. Chứng minh rằng SH ⊥ (ABCD). Tính thể tích hình chóp SABCD.

b. Tìm tập hợp các hình chiếu vuông góc của S lên DM.

c. Tính khoảng cách từ S đến DM theo a và CM = x, với $0 \le x \le a$.



Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.AB^2.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

b. Gọi N là hình chiếu vuông góc của S trên DM.

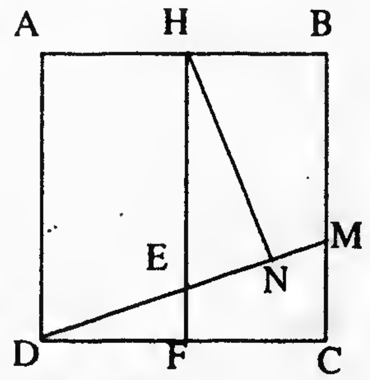
Ta có:

DM ⊥ HN, theo định lí ba đường vuông góc

$\Leftrightarrow \widehat{DNH} = 90^0 \Leftrightarrow$ N thuộc đường tròn đường kính DH.

Vậy, tập hợp các hình chiếu vuông góc của S lên DM là đường tròn đường kính DH trong mặt phẳng (ABCD).

c. Gọi F là trung điểm CD và HF cắt DM tại E, suy ra:



$$EF = \frac{1}{2}CM = \frac{x}{2},$$

$$EH = HF - EF = a - \frac{x}{2}.$$

Hai tam giác vuông HNE và DFE đồng dạng, suy ra:

$$\frac{HN}{DF} = \frac{HE}{DE} \Leftrightarrow HN = \frac{DF.HE}{DE} = \frac{\frac{a}{2}.\left(a - \frac{x}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{a(2a-x)}{2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Trong ΔSHN vuông tại H, ta có:

$$SN = \sqrt{SH^2 + HN^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left[\frac{a(2a-x)}{2\sqrt{a^2+x^2}}\right]^2} = \sqrt{\frac{7a^4 - 4a^3x + 4a^2x^2}{4(a^2+x^2)}}.$$

Vậy, khoảng cách từ S đến DM bằng $\sqrt{\frac{7a^4 - 4a^3x + 4a^2x^2}{4(a^2+x^2)}}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Một hình chóp tứ giác đều có các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a. Hãy tính thể tích và diện tích mặt chéo của hình chóp.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có các cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a.

a. Tính thể tích hình chóp.

b. Qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có chiều cao SH = h và góc ở đáy của mặt bên là α.

a. Tính thể tích hình chóp theo α và h.

b. Cho điểm M di động trên cạnh SC. Tìm tập hợp hình chiếu của S xuống mặt phẳng (MAB).

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABC có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy. Đáy ABC là một tam giác cân đỉnh A. Trung tuyến AD bằng a. Cạnh SB tạo với đáy góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc β.

a. Xác định các góc α và β.

b. Chứng minh rằng $SB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$

c. Tính thể tích hình chóp.

Bài tập 5: Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác cân AB = AC = a. Mặt (SBC) vuông góc với mặt (ABC) và SA = SB = a.

a. Chứng minh rằng tam giác SBC là tam giác vuông.

b. Cho SC = x. Tính thể tích hình chóp theo a và x.

Bài tập 6: Cho một hình chóp có đáy là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy, hai mặt bên còn lai đều tạo với đáy môt góc 45^0.

a. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp xuống đáy là trung điểm cạnh huyền của đáy.

b. Tính thể tích hình chóp.

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy bằng a và đường cao bằng h. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. (P) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a. h phải thoả mãn điều kiện gì để C' là môt điểm thuộc cạnh SC ?

b. Tính thể tích hình chóp SAB'C'D'.

c. Chứng minh rằng tam giác B'C'D' luôn có một góc tù.

Bài tập 8: Trên cạnh AD của hình vuông ABCD cạnh a người ta lấy điểm M với AM = x, với $0 \le x \le a$ và trên nửa đường thẳng Ax vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông, người ta lấy điểm S với SA = y, với y > 0.

a. Chứng minh rằng (SBA) $\perp$ (SBC).

b. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SAC).

c. Tính thể tích hình chóp SABCM.

d. Với giả thiết $x^2 + y^2 = a^2$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích SABCM.

e. I là điểm của SC. Tìm quỹ tích hình chiếu của I xuống MC khi M di động trên đoạn AD.

Bài toán 3: Thể tích của chóp cụt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng công thức:

$$V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2}).h$$

trong đó:

- B_1, B_2 là diện tích của hai đáy,
- h là chiều cao của chóp cụt.

Ví dụ 1: Cho một hình chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ có đoạn nối tâm của hai đáy là $OO_1 = 2R$. Gọi I, M, M_1 là trung điểm của OO_1, AB, A_1B_1 và $OM = x$, $O_1M_1 = y$. Giả sử x, y thay đổi còn khoảng cách từ I đến các mặt bên luôn bằng R (không đổi).

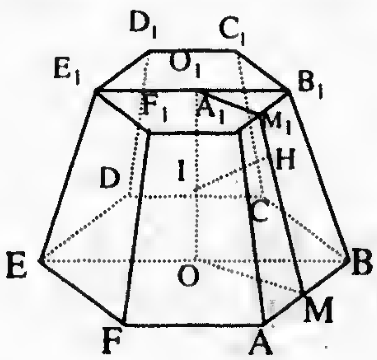
a. Chứng minh rằng tích số diện tích của hai đáy hình chóp cụt không đổi.

b. Tính thể tích của chóp cụt theo x, y , R. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích đó.

c. Tìm góc hợp bởi mặt bên và mặt đáy lớn của hình chóp cụt trong các trường hợp sau:

$x + y = 4R$

$x - y = 2R.$



Giải

a. Gọi B_1, B_2 theo thứ tự là diện tícg của ABCDEF, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ta có:

$$B_1 = 6S_{\Delta OAB} = 6.\frac{1}{2}.OM.AB = 3x.\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{6x^2}{\sqrt{3}}.$$

$$B_2 = 6S_{\Delta O_1A_1B_1} = 6.\frac{1}{2}.O_1M_1.A_1B_1 = 3y.\frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{6y^2}{\sqrt{3}}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lêm MM_1, suy ra:

$IH = d(I, (ABB_1A_1)) = R.$

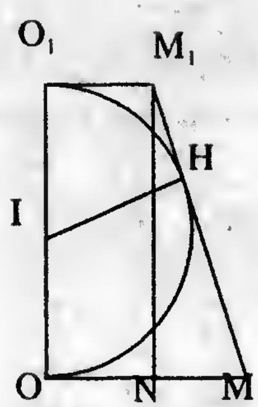
Dựa trên tính chất tiếp tuyến xuất phát từ một điểm, ta có:

$MM_1 = MH + M_1H = MO + M_1O_1 = x + y.$

Mặt khác, ta cũng có:

$MM_1^2 = M_1N^2 + MN^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 4R^2 + (x - y)^2$

$\Leftrightarrow xy = R^2.$ (1)



Khi đó:

$$B_1.B_2 = \frac{6x^2}{\sqrt{3}}.\frac{6y^2}{\sqrt{3}} = 12R^4 \text{ – không đổi.}$$

b. Ta có:

$$V = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1.B_2}).h = \frac{1}{3}\left(\frac{6x^2}{\sqrt{3}} + \frac{6y^2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{6x^2}{\sqrt{3}}.\frac{6y^2}{\sqrt{3}}}\right).2R$$

$$= \frac{4R\sqrt{3}}{3}(x^2 + y^2 + xy).$$

c. Góc giữa mặt bên và đáy lớn chính là góc $\widehat{M_1MN}$.

Trong ΔM_1MN vuông tại N, ta có:

$$\cos M_1MN = \frac{MN}{MM_1} = \frac{x-y}{x+y}.$$

Khi đó:

- Với $x + y = 4R$ thì kết hợp với (1) ta được:

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 16R^2 - 4R^2 = 12R^2 \Rightarrow x - y = 2R\sqrt{3}$$

$$\cos\widehat{M_1MN} = \frac{2R\sqrt{3}}{4R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{M_1MN} = 30^0.$$

- Với $x - y = 2R$ thì kết hợp với (1) ta được:

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2 \Rightarrow x - y = 2R\sqrt{2}$$

$$\cos\widehat{M_1MN} = \frac{2R}{2R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{M_1MN} = 45^0.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Một hình chóp cụt tam giác đều có cạnh đáy lớn bằng a, đáy nhỏ bằng b, góc giữa đường cao với mặt bên bằng α.

a. Tính tổng diện tích các mặt của hình chóp cụt (tổng này được gọi là *diện tích toàn phần*).

b. Tính thể tích của hình chóp cụt.

Bài tập 2: Một hình chóp cụt tứ giác đều có chiều cao là h, góc hợp bởi cạnh bên và đáy lớn là α. Góc hợp bởi đường chéo của hình chóp cụt và đáy lớn là β. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp cụt.

Bài tập 3: Cho một hình chóp cụt tứ giác đều có diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy, cạnh đáy lớn là a, cạnh đáy nhỏ là b.

a. Tính chiều cao hình chóp cụt.

b. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp cụt.

Bài tập 4: Diện tích đáy trên và đáy dưới của một hình chóp cụt là a^2 và b^2. Hãy tính diện tích của thiết diện song song với hai đáy và chia đôi thể tích của hình chóp cụt.

Bài toán 4: Thể tích khối đa diện khác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

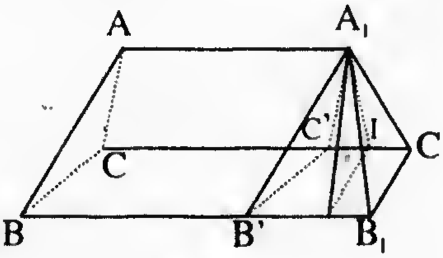
Để tính thể tích một khối đa diện (H) phức tạp ta thường dùng hai cách sau:

Cách 1: Phân chia (H) thành các khối đa diện đơn giản (H_1), (H_2), ... (hình lăng trụ, hình hộp, hình chóp), từ đó tính thể tích từng phần rồi cộng lại.

Cách 2: Ghép thêm vào (H) các khối đơn giản (H_1), (H_2), ... (thông thường là hình chóp) để tạo thành một khối đa diện (H') đơn giản, từ đó tính thể tích từng phần rồi thực hiện phép trừ.

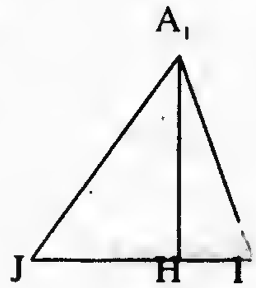
Ví dụ 1: Trên ba đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3) đôi một song song với nhau và không đồng phẳng lấy các cặp điểm A và A_1, B và B_1, C và C_1. Tính thể tích của đa diện $ABC.A_1B_1C_1$, biết $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ và mặt phẳng α vuông góc với d_1 cắt đa diện theo thiết diện có diện tích bằng S.

Giải



Giả sử $a \le b \le c$. Khi đó:

- Qua A_1 dựng thiết diện ($A_1B'C'$) // (ABC).
- Qua A_1 dựng thiết diện thẳng (A_1IJ) và gọi H là hình chiếu vuông góc của A_1 lên IJ.



Như vậy, đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ được chia thành khối lăng trụ $ABC.A_1B'C'$ và hình chóp $A_1.B'C'C_1B_1$.

Thể tích V của đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ được cho bởi:

$$V = V_{ACB.A_1B'C'} + V_{A_1.B'C'B_1C_1}$$

$$= S_{A_1IJ}.AA_1 + \frac{1}{3}S_{B'C'B_1C_1}.A_1H$$

$$= S_{A_1IJ}.AA_1 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}(B'B_1 + C'C_1).IJ.A_1H = S.a + \frac{1}{3}(b - a + c - a)S$$

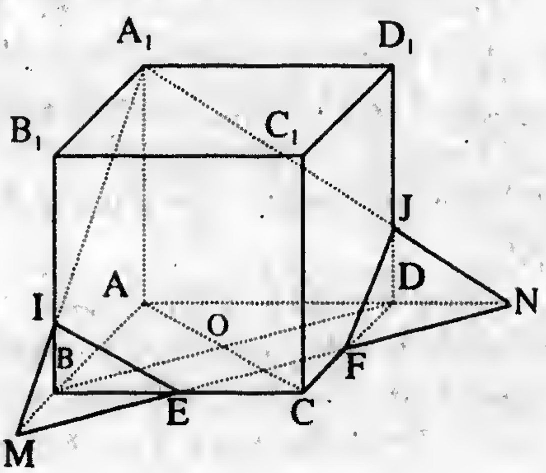
$$= \frac{1}{3}(a + b + c)S.$$

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A_1EF) và hình lập phương.

b. Tính thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (A_1EF) cắt ra.

Giải



a. Ta lần lượt có:

- EF cắt AB, AD theo thứ tự tại M, N.
- A_1M cắt BB_1 tại I.
- A_1N cắt DD_1 tại J.
- Nối IE và JF.

Ta nhận được thiết diện là A_1IEFJ.

b. Đặt:

$$V_1 = V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1},$$

$V_2 = V_{A_1B_1C_1D_1IEFJ}$,

$V_3 = V_{ABEFDJA_1I}$,

$V_4 = V_{M.IBE}$, $V_5 = V_{N.DFJ}$, $V_6 = V_{A_1.AMN}$.

Ta có ngay:

$$V_1 = a^3.$$

$$V_4 = V_5 = \frac{1}{3}S_{\Delta IBE}.BM = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}IB.EB.BM = \frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{72}.$$

$$V_6 = \frac{1}{3}S_{\Delta AMN}.AA_1 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AM.AN.AA_1 = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}.a = \frac{3a^3}{8}.$$

$$V_3 = V_6 - 2V_4 = \frac{3a^3}{8} - 2.\frac{a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}.$$

$$V_2 = V_1 - V_3 = a^3 - \frac{25a^3}{72} = \frac{47a^3}{72}.$$

Vậy, mặt phẳng (A_1EF) chia hình lập phương thành hai phần có thể tích là:

$$V_{A_1B_1C_1D_1IEFJ} = \frac{47a^3}{72} \text{ và } V_{ABEFDJA_1I} = \frac{25a^3}{72}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. E và F lần lượt là trung điểm của BB_1 và DD_1.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A_1EF) và hình lập phương.

b. Tính thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (A_1EF) cắt ra.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng α cho ΔABC có diện tích S, trên ba nửa đường thẳng Ax, By, Cz song song với nhau và ở về cùng một phía đối với α lấy các điểm A_1, B_1, C_1. Đặt $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$. Tính thể tích của đa diện $ABC.A_1B_1C_1$.

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SEF) và hình chóp.

b. Tính thể tích hai phần của hình chóp do mặt phẳng (SEF) cắt ra.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a, SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp.

b. Tính thể tích hai phần của hình chóp do mặt phẳng (MNP) cắt ra.

Bài tập 5: Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BB_1 và CC_1, P là điểm thuộc đoạn AA_1 sao cho $AP = 3A_1P$.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình lăng trụ.
b. Tính thể tích hai phần của hình lăng trụ do mặt phẳng (MNP) cắt ra.

Bài toán 5: Tính tỉ số thể tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để tính tỉ số thể tích hai phần của một khối đa diện (H) được phân chia bởi một mặt phẳng α ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng thiết diện tạo bởi α và (H).

Bước 2: Dùng phương pháp tính thể tích đa biết để tính các thể tích V_1 và V_2 của 2 hình (H_1) và (H_2) của (H) do α cắt ra.

Bước 3: Tính $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Cách 2: Sử dụng kết quả:

" *Trên ba tia không đồng phẳng Sx, Sy, Sz lấy lần lượt các cặp điểm A và A_1, B và B_1, C và C_1 khi đó ta luôn có:*

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SA}{SA_1}\cdot\frac{SB}{SB_1}\cdot\frac{SC}{SC_1} \text{ "} \qquad (*)$$

Chú ý: Dựa vào kết quả (*) chúng ta nhận thêm được một cách tính thể tích.

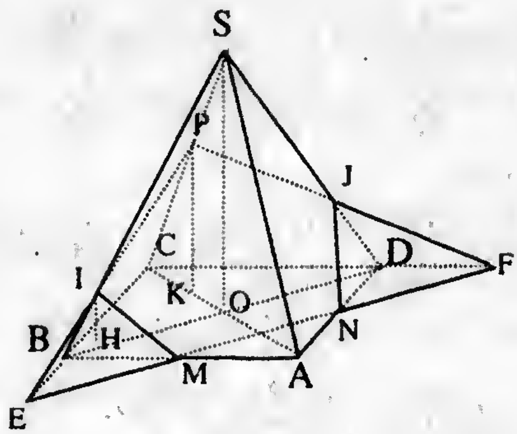
<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC.

a. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp.
b. Tính tỉ số thể tích của hai phần hình chóp được phân chia bởi mặt phẳng (MNP).

Giải

a. Ta lần lượt có:
- MN cắt BC, CD theo thứ tự tại E, F.
- PE cắt SB tại I.
- PF cắt SD tại J.
- Nối IM và JN.

Ta nhận được thiết diện là MNJPI.



b. Đặt SO = h, AB = a và:

$V_1 = V_{S.ABCD}$,

$V_2 = V_{SMANJPI}$,

$V_3 = V_{BCDNMIPJ}$,

$V_4 = V_{I.BME}$, $V_5 = V_{J.DNF}$, $V_6 = V_{P.CEF}$.

Ta có ngay:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h.$$

$$V_4 = V_5 = \frac{1}{3}S_{\Delta BME}.IH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BM.BE.IH = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{h}{4} = \frac{a^2h}{96}.$$

$$V_6 = \frac{1}{3}S_{\Delta CEF}.PK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CE.CF.PK = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{h}{2} = \frac{3a^2h}{16}.$$

$$V_3 = V_6 - 2V_4 = \frac{3a^2h}{16} - 2.\frac{a^2h}{96} = \frac{a^2h}{6}.$$

$$V_2 = V_1 - V_3 = \frac{1}{3}a^2h - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}.$$

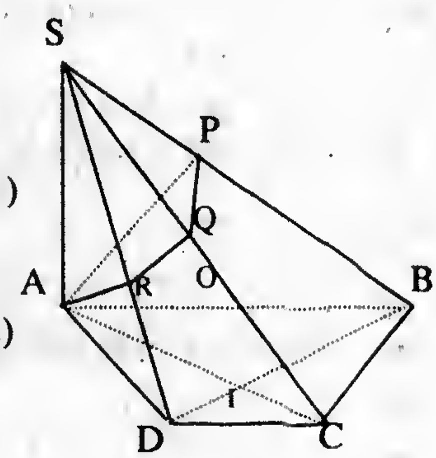
$$\frac{V_2}{V_3} = 1.$$

Vậy, mặt phẳng (A_1EF) chia hình lập phương thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều với AB = 2a, AD = BC = CD = a. Cạnh SA = h vuông góc với đáy. (P) là mặt phẳng qua A, vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại P, Q, R.

a. Chứng minh rằng APQR là một tứ giác nội tiếp được.
b. Tính thể tích hình chóp SAPQR.
c. Tính diện tích tứ giác APQR.

Giải



a. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AQ. \quad (1)$$

Ngoài ra, ta có:

$$SB \perp (APQR) \Rightarrow SB \perp AQ. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AQ \perp (SBC) \Rightarrow AQ \perp PQ.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp AR. \quad (3)$$

Ngoài ra, ta có:

$$SB \perp (APQR) \Rightarrow SB \perp AR. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$AR \perp (SBD) \Rightarrow AR \perp RP.$$

Vậy, tứ giác APQR nội tiếp trong đường tròn đường kính AP.

b. Ta có:

$$V_{S.APQR} = V_{S.APQ} + V_{S.AQR}. \qquad (*)$$

$$\frac{V_{SAPQ}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SP}{SB}.\frac{SQ}{SC} = \frac{SP}{SB}.\frac{SQ}{SC}.$$

$$\frac{V_{SAQR}}{V_{SACD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SQ}{SC}.\frac{SR}{SD} = \frac{SQ}{SC}.\frac{SR}{SD}.$$

Trong đó:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}.3.S_{\Delta OBC}.SA = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}..AC.BC.SA = \frac{a^2h\sqrt{3}}{6}.$$

$$V_{S.ACD} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABC} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2h\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12}.$$

$$\frac{SP}{SB} = \frac{SP.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2+AB^2} = \frac{h^2}{h^2+4a^2}.$$

$$\frac{SQ}{SC} = \frac{SQ.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2+AC^2} = \frac{h^2}{h^2+3a^2}.$$

$$\frac{SR}{SD} = \frac{SR.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2+AD^2} = \frac{h^2}{h^2+a^2}.$$

Từ đó:

$$V_{S.APQ} = \frac{h^2}{h^2+4a^2}.\frac{h^2}{h^2+3a^2}.\frac{a^2h\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2h^5\sqrt{3}}{6(h^2+4a^2)(h^2+3a^2)}$$

$$V_{S.AQR} = \frac{h^2}{h^2+3a^2}.\frac{h^2}{h^2+a^2}.\frac{a^2h\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2h^5\sqrt{3}}{12(h^2+3a^2)(h^2+a^2)}$$

$$V_{S.APQR} = \frac{a^2h^5\sqrt{3}}{6(h^2+4a^2)(h^2+3a^2)} + \frac{a^2h^5\sqrt{3}}{12(h^2+3a^2)(h^2+a^2)}$$

$$= \frac{a^2h^5\sqrt{3}(h^2+2a^2)}{4(h^2+4a^2)(h^2+3a^2)(h^2+a^2)}.$$

c. Ta có:

$$V_{S.APQR} = \frac{1}{3}S_{APQR}.SP \Leftrightarrow S_{APQR} = \frac{3V_{S.APQR}}{SP}$$

$$= \frac{a^2h^3\sqrt{3}(h^2+2a^2)}{4(h^2+3a^2)(h^2+a^2)\sqrt{(h^2+4a^2)}}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của D'C'. Tính tỉ số thể tích hai phần của hình lập phương do mặt phẳng (A'MO) cắt ra.

Bài tập 2: Cho hình chóp SABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a, tâm là O. Đường cao của hình chóp là SA = a. M là một điểm di động trên cạnh SB. Đặt $BM = x\sqrt{2}$, với $0 \le x \le a$. Gọi α là mặt phẳng qua OM và vuông góc với ABCD.

a. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng α. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

b. Định x để thiết diện là hình thang vuông. Trong trường hợp đó tính tỉ số thể tích 2 phần của hình chóp SABCD chia bởi thiết diện.

Bài tập 3: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a. Gọi M và N là trung điểm các cạnh AD, CD, và gọi P là điểm trên cạnh BB_1 có $BP = 3\ PB_1$.

a. Tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương.

b. Tính tỉ số thể tích 2 phần của hình lập phương do thiết diện cắt ra.

Bài tập 4: Trên đường thẳng vuông góc tại A với mặt phẳng của hình vuông ABCD cạnh a ta lấy điểm S với SA = 2a. Gọi B', D' là hình chiếu của A lên SB và SD. Mặt phẳng AB'D' cắt SC tại C'. Tính thể tích hình chóp SAB'C'D'.

Bài tập 5: Các mặt phẳng ABC_1 và $A_1B_1C_1$ chia lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ thành 4 phần. Tính tỉ số thể tích của các phần đó.

Bài tập 6: Mặt phẳng song song với hai cạnh chéo nhau của tứ diện và chia một trong hai cạnh kia theo tỉ số 2:1. Mặt phẳng đó chia thể tích của tứ diện theo tỉ số nào ?

Bài toán 6: Dùng thể tích để chứng minh các hệ thức.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập đẳng thức (*) giữa một số các thể tích có liên quan đến các đại lượng cần chứng minh.

Bước 2: Tính các thể tích có mặt trong (*).

Bước 3: Thay vào (*), đơn giản, rút gọn ta được hệ thức cần tìm.

Chú ý: Trong hầu hết các trường hợp chúng ta cần sử dụng thể tích của hình ban đầu.

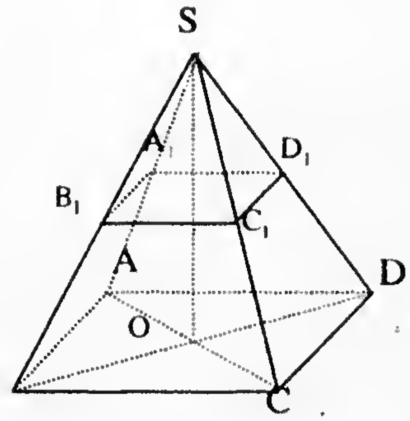
<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành ABCD. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA}{SA_1} + \frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} + \frac{SD}{SD_1}.$$

Giải

Đặt $V = V_{S.ABCD}$.

Nhận xét rằng:



$$V_{S.A_1B_1C_1} + V_{S.A_1D_1C_1} = V_{S.A_1B_1D_1} + V_{S.C_1B_1D_1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{\frac{V}{2}} + \frac{V_{S.A_1D_1C_1}}{\frac{V}{2}} = \frac{V_{S.A_1B_1D_1}}{\frac{V}{2}} + \frac{V_{S.C_1B_1D_1}}{\frac{V}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_{S.A_1B_1C_1}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.A_1D_1C_1}}{V_{S.ADC}} = \frac{V_{S.A_1B_1D_1}}{V_{S.ABD}} + \frac{V_{S.C_1B_1D_1}}{V_{S.CBD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC} + \frac{SA_1}{SA}.\frac{SD_1}{SD}.\frac{SC_1}{SC} = \frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SD_1}{SD} + \frac{SC_1}{SC}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SD_1}{SD}$$

Chia cả hai vế của đẳng thức cho $\frac{SA_1}{SA}.\frac{SB_1}{SB}.\frac{SC_1}{SC}.\frac{SD_1}{SD}$, ta được:

$$\frac{SD}{SD_1} + \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1} + \frac{SA}{SA_1}, \text{ đpcm.}$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Chứng minh rằng nếu x_1, x_2, x_3, x_4 là khoảng cách từ 1 điểm tuỳ ý nằm trong tứ diện đến các mặt của nó, còn h_1, h_2, h_3, h_4 là các đường cao tương ứng của tứ diện, thì:

$$\frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Bài tập 2: Trên mặt phẳng (ABC) của tứ diện ABCD lấy điểm O và qua O dựng các đoạn thẳng OA_1, OB_1, và OC_1 song song với các cạnh DA, DB và DC đến khi cắt các mặt của tứ diện. Chứng minh rằng:

$$\frac{OA_1}{DA} + \frac{OB_1}{DB} + \frac{OC_1}{DC} = 1.$$

Bài tập 3: Giả sử r là bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện r_a, r_b, r_c và r_d là bán kính hình cầu mà mỗi hình cầu tiếp xúc với một mặt và phần mở rộng của 3 mặt kia. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_d} = \frac{2}{r}.$$

Bài tập 4: Cho hình chóp tứ giác lồi MABCD đỉnh M. Một mặt phẳng cắt các cạnh MA, MB, MC và MD tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng. Chứng minh rằng:

$$S_{BCD}\frac{MA}{MA_1}+S_{ABD}\frac{MC}{MC_1}=S_{ABC}\frac{MD}{MD_1}+S_{ACD}\frac{MB}{MB_1}$$

Bài tập 5: Các độ dài của năm cạnh tứ diện không vượt quá 1. Chứng minh rằng thể tích của nó không vượt quá $\frac{1}{8}$.

Bài tập 6: Trên đáy của hình chóp tam giác OABC đỉnh O lấy điểm M. Chứng minh rằng:

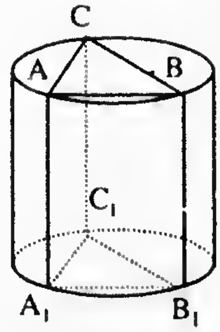
$$OM.S_{ABC} \le OA.S_{MBC} + OB.S_{MAC} + OC.S_{MAB}.$$

CHỦ ĐỀ 3

DIỆN TÍCH CÁC HÌNH TRÒN XOAY
THỂ TÍCH CÁC KHỐI TRÒN XOAY

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. LĂNG TRỤ ĐỨNG NỘI TIẾP HÌNH TRỤ



Định nghĩa: *Một lăng trụ đứng gọi là nội tiếp trong một hình trụ khi hai đa giác đáy của nó nội tiếp trong hai đáy của hình trụ*, khi đó ta cũng nói *khối lăng trụ tương ứng nội tiếp trong khối trụ tương ứng.*

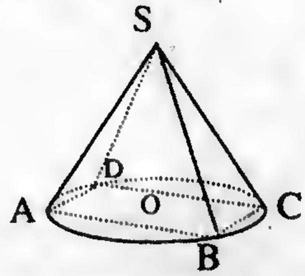
2. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH TRỤ – THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

Với hình trụ có bán kính đáy R và đường cao h, ta có:

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$
$$V = \pi R^2h.$$

Chú ý: Xét hình chữ nhật có một cạnh bằng chu vi đáy của hình trụ ($2\pi R$), cạnh còn lại bằng đường cao của hình trụ (h). Hình chữ nhật này được gọi là *hình khai triển* của mặt xung quanh của hình trụ.

3. HÌNH CHÓP NỘI TIẾP HÌNH NÓN



Định nghĩa: *Một hình chóp gọi là nội tiếp trong một hình nón khi hình chóp có đỉnh trùng với đỉnh của hình nón và đa giác đáy của nó nội tiếp trong đáy của hình nón*, khi đó ta cũng nói *khối chóp tương ứng nội tiếp trong khối nón tương ứng.*

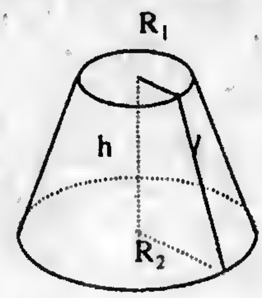
4. DIỆN TÍCH XUNG QUANH CỦA HÌNH NÓN – THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Với hình nón có bán kính đáy R, đường sinh l và đường cao h, ta có:

$$S_{xq} = \pi Rl.$$
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2h.$$

Chú ý: Xét hình quạt có bán kính bằng đường sing của hình nón (l), đáy là cung tròn có độ dài bằng chu vi đáy của hình nón ($2\pi R$). Hình quạt này được gọi là *hình khai triển* của mặt xung quanh của hình nón.

5. HÌNH NÓN CỤT



Với hình nón cụt có bán kính hai đáy là R_1 và R_2, đường sinh l và đường cao h, ta có:

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_1.R_2)h.$$

6. DIỆN TÍCH MẶT CẦU – THỂ TÍCH KHỐI CẦU

Với hình cầu có bán kính R, ta có:

$$S = 4\pi R^2.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

II. CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Bài toán 1: Diện tích xung quanh của hình trụ – Thể tích khối trụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hình trụ có bán kính đáy R và đường cao h, ta sử dụng công thức:

$$S_{xq} = 2\pi Rh.$$

$$V = \pi R^2 h.$$

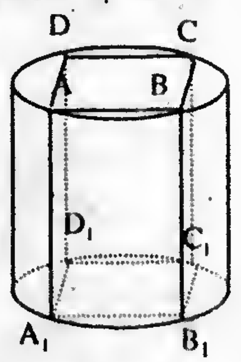
Ví dụ 1: Một hình trụ có bán kính đáy R và thiết diện qua trục là một hình vuông.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b. Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

c. Tính thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho.

Giải



a. Vì thiết diện qua trục là một hình vuông nên hình trụ có chiều cao bằng 2R.

Ta có ngay:

$$S_{xq} = 2\pi R.2R = 4\pi R^2.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 4\pi R^4 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2.$$

b. Ta có ngay:

$$V = \pi R^2.R = 2\pi R^3.$$

c. Gọi $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong khối trụ đã cho, ta có $AB = R\sqrt{2}$.

Do đó, thể tích V_1 của được cho bởi:

$$V_1 = (R\sqrt{2})^2.2R = 4R^3.$$

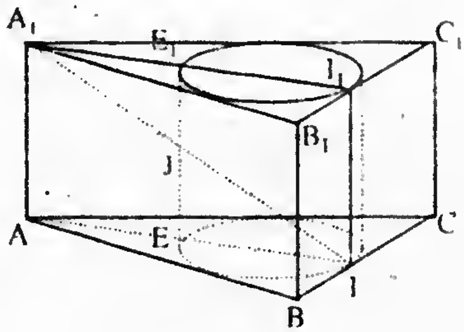
Ví dụ 2: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng h.

a. Tính diện tích xung quanh của hình trụ nội tiếp trong lăng trụ.

b. Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng A_1I cắt hình trụ nội tiếp trong câu a) theo một đoạn thẳng. Tính độ dài đoạn thẳng này.

Giải

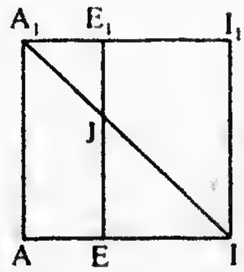
a. Hình trụ nội tiếp trong lăng trụ có đường tròn đáy tiếp xúc với các cạnh đáy tại trung điểm của mỗi cạnh. Do đó, hình trụ nội tiếp có bán kính đáy $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ và chiều cao bằng h.



Ta có ngay:

$$S_{xq} = 2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.h = \frac{\pi ah\sqrt{3}}{3}.$$

b. Mặt phẳng (AA_1I) cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật EE_1I_1I, A_1I cắt EE_1 taih J. Do đó, đường thẳng A_1I cắt hình trụ nội tiếp trong câu a) theo một đoạn thẳng là IJ.



Ta có:

$$IJ^2 = JE^2 + IE^2 = \left(\frac{2}{3}AA_1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AI\right)^2$$

$$= \left(\frac{2h}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4h^2+3a^2}{9}.$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{\sqrt{4h^2+3a^2}}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính R, chiều cao hình trụ là $R\sqrt{2}$. Trên hai đường tròn O và O' có hai điểm di động A, B sao cho (OA, O'B) = α không đổi.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b. Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

c. Tính AB theo R và α.

d. Dựng đoạn thẳng vuông góc chung IK của AB và OO'($I \in AB$).

e. Chứng minh rằng khi AB di động I luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài tập 2: Hai đỉnh đối nhau của nhau của hình lập phương trùng với tâm của hai đáy hình trụ, còn các đỉnh khác của nó đều nằm trên mặt xung quanh của hình trụ. Tính tỉ số thể tích của hình trụ và hình lập phương.

Bài tập 3: Một hình trụ có thể V không đổi. Tính bán kính đáy và chiều cao của hình trụ để:

a. Diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Diện tích xung quanh cộng diện tích một đáy đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao SA = 2a. MNPQ là thiết diện song song với đáy, $M \in SA$ và AM = x. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp MNPQ và đường sinh là MA.

a. Tính diện tích MNPQ theo a và x.
b. Tính thể tích của hình lăng trụ theo a và x.
c. Tìm hình lăng trụ có thể tích lớn nhất.

Bài toán 2: Diện tích xung quanh của hình nón – Thể tích khối nón.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hình nón có bán kính đáy R, đường sinh l và đường cao h, ta sử dụng công thức:

$$S_{xq} = \pi R l.$$

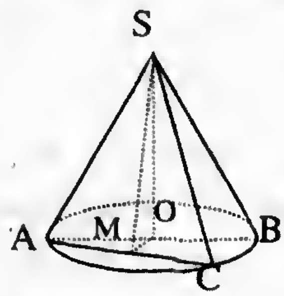
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

<u>**Ví dụ 1:**</u> Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.
b. Tính thể tích của khối nón tương ứng.
c. Một thiết diện qua đỉnh tạo với đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện này.

Giải

a. Vì thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Do đó, hình nón có $R = h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $l = a$.



Ta có ngay:

$$S_{xq} = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + B = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi a^2}{2}.$$

b. Ta có ngay:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}.$$

c. Giả sử ΔSAC là thiết diện qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên AC, suy ra $\widehat{SMO} = 60^0$.

Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SM = \frac{SO}{\sin\widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$OM = \frac{1}{2}SM = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong ΔAOM vuông tại M, ta có:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

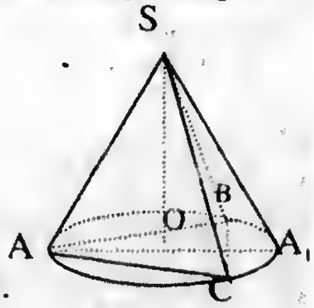
Khi đó, diện tích thiết diện SAC được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2}SM.AC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}.$$

__Ví dụ 2:__ Tính thể tích hình nón biết thể tích hình chóp tam giác đều nội tiếp trong hình nón là V.

Giải

Giả sử hình chóp tam giác đều nội tiếp trong hình nón có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h, ta có:



$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{a^2h\sqrt{3}}{12} \Rightarrow a^2h = 4V\sqrt{3}.$$

Khi đó, hình nón có:

bán kính đáy $R = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và chiều cao bằng h.

Từ đó:

$$V_{nón} = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.h = \frac{\pi a^2 h}{9} = \frac{\pi.4V\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}\pi.V}{9}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Tính thể tích của hình nón trong các trường hợp sau:

a. Đường sinh là l và góc hợp bởi đường sinh và đáy là α.

b. Bán kính đáy là R, góc giữa đường sinh và trục của hình nón là β.

c. Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có diện tích là S.

Bài tập 2: Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là một hình tròn tâm O bán kính R, chiều cao của hình nón bằng 2R. gọi I là một điểm nằm trên mặt đáy và cách O một

đoạn bằng 2R. Trong hình tròn O kẻ bán kính OA vuông góc với OI. IA cắt đường tròn tại B.

a. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón.

b. M là một điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại N. Chứng minh rằng N di động trên một đoạn thẳng cố định.

c. Chứng minh rằng hình chiếu K của O trên IM di động trên một đường tròn cố định đi qua trực tâm H của ΔSAI.

Bài tập 3: Một mặt phẳng (P) qua đỉnh của một hình nón cắt đường tròn đáy theo một cung có số đo là α ($\alpha < \pi$). Biết rằng (P) hợp với mặt đáy một góc β và khoảng cách từ tâm của đáy tới (P) bằng a. Tính thể tích hình nón theo a, α và β.

Bài tập 4: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy là a và mặt bên có góc đáy là α. Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón nội tiếp hình chóp.

Bài tập 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao h, $\widehat{ASB} = \alpha$.

a. Tính diện tích xung quanh hình chóp.

b. Tính diện tích xung quanh hình nón ngoại tiếp hình chóp.

Bài tập 6: Trên một hình tròn làm đáy chung, ta dựng hai hình nón (Hình này chứa hình kia) sao cho hai đỉnh cách nhau một đoạn bằng a. Góc ở đỉnh của thiết diện qua trục của hình nón lớn là 2α và của hình nón nhỏ là 2β. Tính thể tích của phần ở ngoài hình nón nhỏ và ở trong hình nón lớn.

Bài toán 3: Diện tích xung quanh của hình nón cụt – Thể tích khối nón cụt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hình nón cụt có bán kính hai đáy là R_1 và R_2, đường sinh l và đường cao h, ta sử dụng công thức:

$$S_{xq} = \pi(R_1 + R_2)l.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi(R_1^2 + R_2^2 + R_1.R_2)h.$$

<u>Ví dụ 1:</u> Một hình nón cụt có chiều cao 2a và hai bán kính đáy lần lượt là a và 4a.

a. Tính độ dài đường sinh.

b. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón cụt.

c. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

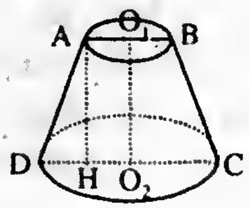
Giải

a. Ta thấy ngay thiết diện ABCD là hình thang cân và $O_1A = a$, $O_2D = 4a$, $O_1O_2 = 2a$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên CD, ta có:

$AH = O_1O_2 = 2a.$

$l = AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{O_1O_2^2 + (DO_2 - AO_1)^2}$



$= \sqrt{4a^2 + (4a - a)^2} = a\sqrt{13}$.

b. Ta có:

$$S_{xq} = \pi(a + 4a).a\sqrt{13} = 5\pi a^2\sqrt{13}.$$

$$S_{tp} = S_{xq} + B_1 + B_2 = 5\pi a^2\sqrt{13} + \pi a^2 + 16\pi a^2 = \pi a^2(5\sqrt{13} + 17).$$

c. Ta có:

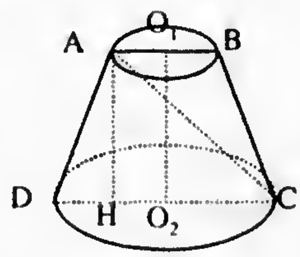
$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2 + 16a^2 + 4a^2).2a = 14\pi a^3.$$

<u>Ví dụ 2:</u> Cho hình nón cụt có đường sinh l, góc giữa đường sinh và đáy lớn bằng α và thiết diện qua trục có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính diện tích xung quanh của hình nón cụt đã cho.

Giải

Ta thấy ngay thiết diện ABCD là hình thang cân và $\widehat{ADC} = \alpha$, $AC \perp AD$.

Gọi R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) lần lượt là bán kính của hai đáy.



Trong ΔACD vuông tại A, ta có:

$$CD = \frac{AD}{\cos\widehat{ADC}} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên CD, ta có:

$$DH = AD.\cos\widehat{ADH} = l.\cos\alpha \Rightarrow R_1 = R_2 - AH = \frac{1}{2\cos\alpha} - l.\cos\alpha.$$

Khi đó:

$$S_{xq} = \pi\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - l.\cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)l = \pi l^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$$

$$= \pi l^2\left(\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = \pi l^2.\sin\alpha.\text{tg}\alpha.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Một hình nón cụt có các đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với nhau, đường sinh có độ dài l và tạo với đáy lớn một góc α.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón cụt.

b. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

Bài tập 2: Cho hình nón cụt có bán kính đáy lớn gấp 2 lần bán kính đáy nhỏ, chiều cao hình nón cụt là h, đường chéo của thiết diện qua trục vuông góc với cạnh bên của thiết diện đó.

a. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón cụt.

b. Tính thể tích của khối nón cụt tương ứng.

Bài toán 4: Diện tích mặt cầu – Thể tích khối cầu.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Với hình cầu có bán kính R, ta sử dụng công thức:

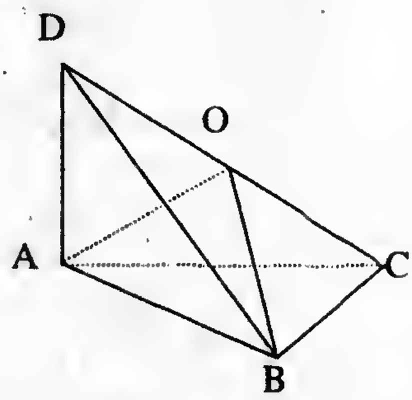
$$S = 4\pi R^2.$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

<u>**Ví dụ 1:**</u> Cho tứ diện ABCD có DA = 5a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), ΔABC vuông tại B và AB = 3a, BC = 4a.

a. Xác tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.
b. Tính diện tích mặt cầu.
d. Tính thể tích của khối cầu tương ứng.

Giải



a. Gọi O là trung điểm CD.

Vì DA ⊥ (ABC) nên:

$$DA \perp AC \Rightarrow OA = OC = OD = \frac{CD}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp DA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD \Rightarrow OB = \frac{CD}{2}.$$

Vậy, ta được:

$$OA = OB = OC = OD = \frac{CD}{2} \Leftrightarrow A, B, C, D \text{ cũng thuộc mặt cầu } S(O, \frac{CD}{2}).$$

Ta có:

$$R = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25a^2 + 9a^2 + 16a^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, mặt cầu có bán kính $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

b. Ta có:

$$S = 4\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2.$$

c. Ta có:

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125a^3\sqrt{2}}{3}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài tập 1: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy một góc φ.

a. Xác định tâm bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (P) ta lấy một điểm S tuỳ ý và dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện ABCDB'C'D'.

b. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

Bài tập 3: Trong mặt phẳng (P) cho hình thang cân ABCD với AB = 2a, BC = CD = DA = a. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy một điểm di động S. Một mặt phẳng qua A vuông góc với SB cắt SB, SC, SD tại P, Q, R theo thứ tự đó.

a. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCDRQP. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

b. Chứng minh rằng tứ giác CDRQ là một tứ giác nội tiếp và đường thẳng đi qua QR luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên đường thẳng Ax.

c. Cho $SA = a\sqrt{3}$. Hãy tính diện tích của tứ giác APQR.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng (α), cho đường tròn đường kính AB = 2R. M là một điểm di động trên đường tròn, MH vuông góc với AB tại H, với AH = x, 0 < x < 2R. Dựng đường thẳng vuông góc với (α) tại M trên đó lấy MS = MH.

a. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp SABM. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

b. Tính x để bán kính đó đạt giá trị lớn nhất.

Bài tập 5: Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

b. Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu và thể tích của hình cầu đó.

Bài tập 6: Cho một hình cầu bán kính R, một hình nón nội tiếp trong hình cầu có chiều cao là x (0 < x < 2R).

a. Tính thể tích V, diện tích xung quanh S của hình nón.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa V, S, R độc lập đối với x.

c. Với giá trị nào của x thì V lớn nhất ?

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V

Bài tập 1: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ đáy là hình thoi có góc nhọn $\hat{A} = \alpha$. Biết rằng tứ giác ABC_1D_1 có diện tích là S và nằm trong mặt phẳng hợp với đáy góc β. Tính theo S, α, β diện tích toàn phần và có thể tích lăng trụ.

Bài tập 2: Trong tất cả các lăng trụ tam giác đều có cùng diện tích toàn phần S, tìm các cạnh bên và cạnh đáy của lăng trụ có thể tích lớn nhất.

Bài tập 3: Cho lăng trụ đều $ABC.A_1B_1C_1$. Tam giác ABC_1 có diện tích $S\sqrt{3}$ hợp với mặt đáy góc α.

a. Tính thể tích lăng trụ.

b. S không đổi, α thay đổi. Tính α để thể tích lăng trụ lớn nhất.

Bài tập 4: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông tại A. Cạnh AA' hợp với BC' một góc α và khoảng cách giữa chúng là h. Đường tròn ngoại tiếp mặt bên BCC'B' có bán kính là R.

a. Xác định α, h, R.

b. Tính thể tích lăng trụ theo R, h, α.

c. Cho h, α không đổi, R thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích xung quanh hình lăng trụ.

Bài tập 5: Cho lăng trụ xiên ABC. A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, BC = 2a. Mặt bên BCC'B' là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, và hợp với mặt bên ABB'A' một góc α.

a. Tính khoảng cách từ A tới mặt bên (BCC'B').

b. Tính thể tích lăng trụ theo a và α.

c. Gọi β là góc giữa 2 mặt bên qua CC', so sánh cotg α và cotg β.

Bài tập 6: Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' cạnh đáy a, đường cao h. gọi β là mặt phẳng qua A và vuông góc với B'D.

a. Chứng minh β chứa AC. Định h theo a để β cắt lăng trụ theo thiết diện là một tam giác. Tính diện tích tam giác ấy.

b. Gọi α là góc nhọn hợp bởi β và mặt phẳng (ADD'A'). Tính thể tích lăng trụ theo h và α.

Bài tập 7: Cho lăng trụ lục giác đều ABCDEF. A'B'C'D'E'F'. Đường chéo AD' hợp với mặt bên (CDD'C') một góc $\alpha = 30^0$. Mặt phẳng β qua AB và D'E' cắt lăng trụ theo thiết diện có diện tích Q.

a. Chứng minh β qua các trung điểm của CC' và FF'.

b. Tính diện tích xung quanh và thể tích của lăng trụ.

c. Tính khoảng cách giữa AD' và BD.

Bài tập 8: Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' đáy là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AD. Đường chéo AD' = a hợp với mặt bên ABB'A' một góc α.

a. Chứng minh các đỉnh của lăng trụ trừ A và D' đều nhìn AD' dưới một góc vuông.

b. Tính thể tích và diện tích xung quanh của lăng trụ theo a và α.

c. a không đổi, định α để diện tích xung quanh lớn nhất.

d. Xác định thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng qua AD' và song song với A'B.

Bài tập 9: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz và Dt lần lượt vuông góc và ở về cùng phía với (P). Lấy B_1 trên By và D_1 trên Dt sao cho $BB_1 = DD_1 = a$. Gọi Q là mặt phẳng chứa B_1D_1 và cắt Ax, Cz tại A_1 và C_1 theo thứ tự đó.

a. Chứng minh rằng $A_1B_1C_1D_1$ là hình thoi. Tìm điều kiện để $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông.

b. Tính thể tích của lăng trụ cụt $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Bài tập 10: Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác đều nội tiếp đường tròn tâm O. Hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC) là O. Khoảng cách giữa AB và CC' là d và số đo nhị diện cạnh CC' là 2φ.

a. Tính thể tích lăng trụ.

b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABB'A') và (ABC). Tính φ biết $\alpha + \varphi = 90^0$.

Bài tập 11: Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C', đáy là tam giác đều. Hình chiếu của A' lên (ABC) trùng với trung điểm của BC. Hai mặt bên qua AA' vuông góc với nhau.

a. Thiết diện thẳng là hình gì ?

b. Tính thể tích lăng trụ biết chu vi thiết diện thẳng là l.

Bài tập 12: Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C', đáy là tam giác đều. Mặt bên BCC'B' là hình vuông cạnh a. Nhị diện cạnh BC có số đo α ($90^0 < \alpha < 180^0$).

a. Chứng tỏ chân đường cao của lăng trụ vẽ từ A' nằm trên đường cao AI (hoặc kéo dài) của đáy. Tính thể tích lăng trụ theo a và α.

b. Định α để 2 mặt bên qua AA' vuông góc với nhau.

Bài tập 13: Cho lăng trụ ABCD.A'B'C', đáy ABCD có $\hat{A} = \hat{C} = 90^0$, BD = a, $\widehat{ABD} = \alpha$. $\widehat{CBD} = \beta$. Mặt chéo (AA'C'C) là hình thoi có $\widehat{A'AC} = 60^0$ và vuông góc với đáy.

a. Tính thể tích của lăng trụ.

b. Cho a cố định, α và β thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích lăng trụ.

Bài tập 14: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', mặt A'B'C'D hợp với đáy một góc α, hợp với AC một góc β và cách AB một khoảng bằng a. Tính thể tích hình hộp.

Bài tập 15: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'có AB < BC. Hai mặt ACC'A' và BDD'B' hợp với nhau một góc 2α. Đường chéo B'D hợp với mặt (CDD'C') một góc β.

a. Chứng minh $\widehat{COD} = 2\alpha$ và $\widehat{B'DC'} = \beta$ (O là tâm của đáy)

b. Tính thể tích của hình hộp.

c. d không đổi, α, β thay đổi sao hình hộp ADD'A'. BCC'B' luôn luôn là lăng trụ đều. Chứng minh $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình hộp trong điều kiện đó.

Bài tập 16: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', có AC = a, AD' = b, CD' = c.

a. Tính thể tích của hình hộp.

b. a, b, c thay đổi còn chu vi tam giác ACD' không đổi, luôn bằng l, với $l > 0$, tìm giá trị lớn nhất của thể tích hình hộp.

Bài tập 17: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Khoảng cách giữa AB và B'C là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích hình hộp.

Bài tập 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D', diện tích các tứ giác ACC'A', ABC'D', BCD'A' lần lượt là S_1, S_2, S_3,. Tính thể tích hình hộp.

Bài tập 13: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', có AA' = h, góc giữa (A'BD) và (ABD) là α và $\widehat{BA'D} = \beta$. Gọi K là hình chiếu của A' lên BD. Đặt KB = x, KD = y.

a. Chứng minh rằng $xy = h^2 \cot g^2\alpha$ và $x + y = h \sin\alpha\, \mathrm{tg}\beta$

b. Tính thể tích hình hộp theo h, α, β.

Bài tập 18: Cho hình hộp ABCD, A'B'C'D' có AB = a, AD = b, AA' = c, $\widehat{A'AD} = \alpha$, $\widehat{A'AB} = \beta$ và $\widehat{BAD} = \gamma$

a. Tính thể tích hình hộp theo a, b, c, α, β, γ

b. Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để tồn tại một điểm cách đều 6 mặt của một hình hộp là $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

c. Điều kiện trên được thoả và $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tính thể tích hình hộp theo a, b, c.

Bài tập 19: Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D', AB = a, AD = b, BAD = α. Đường chéo AC' tạo với đáy góc β, giao điểm các đường chéo hình hộp là O.

a. Tính thể tích hình hộp.

b. Tính tổng T của các bình phương các khoảng cách từ điểm M trong không gian đến 8 đỉnh của hình hộp theo a, b, α, β và x = OM. Suy ra vị trí của M để T bé nhất.

Bài tập 20: Cho lăng trụ đứng ABCD. A'B'C'D' đáy là hình thoi có góc nhọn $\hat{A} = \alpha$. Tứ giác ABC'D' có diện tích Q hợp với mặt phẳng (ABCD) một góc β.

a. Tính theo Q, α, β thể tích lăng trụ.

b. Gọi I là trung điểm của CD. Biết $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$ và $Q = a^2\sqrt{6}$. Hãy tính diện tích thiết diện tạo bởi (A'BI) và lăng trụ theo a.

Bài tập 21: Cho lăng trụ đứng ABCD. $A_1B_1C_1D_1$, có đáy là nửa lục giác đều với AD = CD = BC. Mặt phẳng (A_1B_1CD) hợp với đáy góc 60^0. Một mặt phẳng α di động qua AB_1 cắt CC_1, DD_1 theo thứ tự tại C', D'.

a. Tứ giác $AB_1C'D'$ là hình gì ? Chứng tỏ $AB_1 = 2C'D'$.

b. Dựng thiết diện $AB_1C'D'$ có diện tích nhỏ nhất.

c. Biết diện tích nhỏ nhất có giá trị là Q. Tính thể tích lăng trụ theo Q.

Bài tập 22: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC vuông tại A. Khoảng cách từ AA' tới mặt bên BCC'B' là a, mặt phẳng (ABC') cách C một khoảng b và hợp với đáy góc α.

a. Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$), $CK \perp AC'$($K \in AC'$), chứng minh rằng AH = a, CAC' = α, CK = b.

b. Tính thể tích lăng trụ.

c. Cho a = b không đổi còn α thay đổi. Định x để thể tích lăng trụ nhỏ nhất.

Bài tập 23: Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C', đáy là tam giác đều cạnh a, và AA'= A'B = A'C = b.

a. Xác định đường cao của lăng trụ vẽ từ A'. Chứng minh mặt bên BCC'B' là hình chữ nhật.

b. Định b theo a để mặt bên ABB'A' hợp với đáy góc 60^0.

c. Tính thể tích theo a với giá trị b tìm được.

Bài tập 24: Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A. Mặt bên (ABB'A') là hình thoi cạnh a, nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên (ACC'A') hợp với đáy góc nhị diện có số đo α, ($0 < \alpha < 90^0$)

a. Chứng minh rằng $\widehat{A'AB} = \alpha$.

b. Tính thể tích lăng trụ.

c. Gọi β là góc nhọn mà mặt phẳng (BCC'B') hợp với mặt phẳng đáy. Chứng minh tg β = 2tg α.

Bài tập 25: Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của S lên mặt đáy trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy, SO = h. Một lăng trụ tam giác đều có đáy dưới nằm trên đáy hình chóp, 3 đỉnh của đáy trên thuộc ba cạnh bên hình chóp.

a. Tính cạnh đáy biết lăng trụ có mặt bên là hình vuông.

b. Tính thể tích lớn nhất của lăng trụ khi a, h không đổi.

c. Tính thể tích lớn nhất của lăng trụ khi a, h thay đổi còn cạnh bên hình chóp có độ dài *l* không đổi.

Bài tập 26: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là một hình bình hành, $\widehat{BAD} = 60^0$, AB = a. Các cạnh bên SB và SD cùng tạo với đáy ABCD một góc bằng 45^0 và SB ⊥ AB, SD ⊥ CD.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b. Gọi M, N, K lần lượt là các trung điểm của AB, BC, SD. Hãy tính góc tạo bởi mặt phẳng (MMK) và mặt phẳng (ABCD).

c. Một đường thẳng d đi qua giao điểm H của BD và AC, cắt AB tại E và CD tại F. Chứng minh rằng thể tích của hình chóp SADFE bằng thể tích hình chóp SBCFE.

Bài tập 27: Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh của mỗi hình chóp trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp kia, các cạnh bên của hình chóp này cắt các cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên l của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc α. Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc β. Tìm thể tích của phần chung của hai hình chóp.

Bài tập 28: Cho góc tam diện Sxyz với 3 góc phẳng ở đỉnh là $\widehat{xSy} = \alpha$; $\widehat{ySz} = \beta$; $\widehat{zSx} = \gamma$. Trên Sx, Sy, Sz lấy theo thứ tự các điểm A, B, C và đặt a = SA, b = SB, c = SC.

a. Với a = b = c = l, tính thể tích của tứ diện SABC theo α, β, γ. Từ đó suy ra thể tích của tứ diện SABC trong trường hợp a, b, c là các số tuỳ ý.

b. Cho α, β là các góc nhọn. Góc nhị diện đối diện với góc phẳng γ có số đo bằng 60^0. Chứng minh rằng:

$$\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha + \beta) + 3\cos(\alpha - \beta)].$$

Bài tập 29: Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, AD = b. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía với mặt phẳng ấy, người ta lấy các điểm M và N. Đặt AM = x, CN = y.

a. Tính các góc do các mặt phẳng (BDM) và (BDM) tạo vớ(P), từ đó suy ra rằng để các mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc với nhau, điều kiện cần và đủ là $xy = \dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$

b. Với giả thiết các mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc với nhau, hãy tính thể tích tứ diện BDMN. Khi nào thì thể tích ấy nhỏ nhất ?

Bài tập 30: Trong mặt phẳng α cho tam giác OAB và một điểm M di động trên đoạn thẳng AB. Từ M dựng hai đường thẳng song song với OB, OA lần lượt cắt OA, OB tại P và Q. Gọi I là giao điểm của . Q và BP. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng α kẻ từ M, lấy một điểm S khác M. Đặt OA = a, OB = b.

a. Chứng minh rằng $\frac{OP}{a}+\frac{OQ}{a}=1$. Từ đó suy thể tích của hai hình chóp SOPIQ và SIAB bằng nhau.

b. Cho $\widehat{AOB}=60^0$, $a=2b$ và $SM=a\sqrt{3}$. Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là các góc phẳng của hai nhị diện tạo bởi mặt phẳng (SOA) và (SOB) với mặt phẳng α. Chứng tỏ rằng khi M di động trên d đoạn thẳng AB (nhưng không trùng với A hoặc B) thì ta luôn luôn có hệ thức.

$$\frac{2}{tg\varphi_1}+\frac{1}{tg\varphi_2}=\frac{1}{2}.$$

MỤC LỤC

CHƯƠNG III
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

CHƯƠNG IV
MẶT CẦU VÀ MẶT TRÒN XOAY

CHƯƠNG V
DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: NGUYỄN VĂN TRỌNG

Trình bày bìa: THÁI VĂN

HỌC VÀ ÔN TẬP TOÁN HÌNH HỌC 11

Mã số: 1L - 56ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minhh.

Số xuất bản: 58 - 2007/CXB/48 – 03/ĐHQGHN, ngày 22/01/2007.

Quyết định xuất bản số: 111 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2007.